Vol: 1 / Agustus 2019

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KLASIK MENGGUNAKAN KOMBINASI DERET LEHMER DENGAN $P = 1$ DAN $P = 4$

Fadilla Ulfa*, Wartono

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. HR. Soebrantas No.155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru

* *email:* fadillaulfaaa@gmail.com

ABSTRACT

Fourth order classical Runge Kutta method (RK4) is one of numerical method used to solve first order differential equation. In this research describe about modification of RK4 method using combination of Lehmer means with p = 1 and p = 4. Modification of fourth order Runge Kutta method using combination of Lehmer means (RKKCCL) obtainted by replacing aritmatic means with convex combination Lehmer means for p = 1 and p = 4. Based on the result study, the truncation error and stability value of RKKCCL were obtained at the fifth order. Numerical simulation result shows that the error of RKKCCL method is better then RK4 method for $y' = y,\ y' = -y$ *at* $\alpha = 0{,}2$ *while for y' = 1/y, the error of RKKCCL is almost the same as RK4 method.*

Keywords: *Taylor series, trunction error, classical fourth-order Runge-Kutta method, convex combination of Lehmer means, stability of RKKCCL method.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam perkembangan sains dan teknologi dalam bidang ilmu mesin, ilmu fisika ilmu ekonomi ilmu teknik, ilmu fisika, dan ilmu kimia yang dirumuskan dengan model matematika yang memuat satu atau lebih turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui dalam bentuk persamaan diferensial orde satu nonlinear.

Hampir sebagian besar persamaan diferensial orde satu nonlinear tidak dapat diselesaiakan secara analitik, maka alternatif penyelesaian adalah menggunakan solusi numerik. Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial metode Runge Kutta orde empat. Hal ini disebabkan Metode Runge Kutta orde empat mempunyai nilai galat yang lebih kecil dibandingkan Metode Euler dan Metode Taylor.

Berdasarkan pengambilan parameter bebasnya, metode Runge-Kuta orde empat terbagi menjadi metode Runge Kutta orde empat klasik (RK4), Runge-Kutta orde empat kutta, Runge Kutta orde empat gill dan Runge Kutta orde empat Kuntzmann (Lapidus,1971).

Modifikasi Runge Kutta orde empat klasik (RK4) telah dilakukan oleh peneliti diantaranya Runge Kutta orde empat berdasarakan rata-rata aritmatik (Wazwaz,1991), (Yakub dkk,1999), (Murugesan, 2002), Runge Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik (Sanugi, 1994), (Yaacob, 1998), Runge Kutta orde empat berdasarkan rata-rata kontra harmonik (Evans, 1995), Runge Kutta orde empat berdasarkan rata-rata geometri (Evans,1991), (Wazwaz, 1991), Runge Kutta orde empat rata-rata heronian (Evans, 1995), Runge Kutta orde empat rata-rata berdasarkan rata-rata centroidal (Murugesan, 2002), Runge-Kutta orde tiga menggunakan kombinasi konvex Deret Lehmer (Jayanti dkk, 2018).

Pada artikel ini, penulis melakukan modifikasi metode Runge-Kutta klasik dengan menggunakan deret Lehmer untuk p =1 dan p = 4.
Selain menentukan rumusan modifikasi metode Runge-Kutta klasik, selanjutnya ditentukan galat dan perbandingannya dengan beberapa modifikasi Runge-Kutta klasik yang telah dilakukan oleh peneliti sebelumnya.

PEMBAHASAN

a. Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik

Perhatikan kembali bentuk umum dari Metode Runge Kutta orde empat klasik:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{1}$$

Berdasarkan Persamaan (1) dapat dibentuk persamaan baru yang memuat unsur rata-rata aritmatik sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right). \tag{2}$$

Persamaan (2) merupakan persamaan Runge Kutta orde empat klasik berdasarkan rata-rata aritmatik. Selanjutnya, untuk memodifikasi Persamaan (2) kemudian bentuk aritmatika pada Persamaan (2) digantikan ke dalam bentuk kombinasi konvex Deret Lehmer (Jayanti,2018), sebagai berikut:

$$CCL_1 = (1-\alpha)\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{k_1^4 + k_2^4}{k_1^3 + k_2^3} + \frac{k_2^4 + k_3^4}{k_2^3 + k_3^3} + \frac{k_3^4 + k_4^4}{k_3^3 + k_4^3}\right), \tag{3}$$

dengan mensubstitusikan bentuk kombinasi konvex Deret Lehmer pada Persamaan (3) ke Persamaan (2) sehingga diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left((1-\alpha)\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) + \alpha\left(\frac{k_1^4 + k_2^4}{k_1^3 + k_2^3} + \frac{k_2^4 + k_3^4}{k_2^3 + k_3^3} + \frac{k_3^4 + k_4^4}{k_3^3 + k_4^3}\right)\right). \tag{4}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n),\\
k_2 &= f(x_n + c_1 h, y_n + a_{11}k_1 h),\\
k_3 &= f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21}k_1 h + a_{22}k_2 h),\\
k_4 &= f(x_n + c_3 h, y_n + a_{31}k_1 h + a_{32}k_2 h + a_{33}k_3 h).
\end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) dikenal sebagai Modifikasi Metode Runge Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer dengan p = 1 dan p = 4.

Selanjutnya jabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 ke dalam bentuk Deret Taylor untuk mencari $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33}. Untuk itu, merujuk kepada Jayanti dkk (2018), maka Persamaan (4) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + \frac{pembilang(M)}{penyebut(N)}, \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned}M=h((1-\alpha)((k_1+k_2)(2)(2)(k_1^3+k_2^3)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3)+(k_2+k_3)(2)(2)(k_1^3+k_2^3)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3)+\\ (k_3+k_4)(2)(2)(k_1^3+k_2^3)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3))+\alpha((k_1^4+k_2^4)(2)(2)(2)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3)+(k_2^4+k_3^4)(2)\\ (2)(2)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3)+(k_3^4+k_4^4)(2)(2)(2)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3),\end{aligned} \tag{7}$$

dan

$$N=3(2)(2)(2)(k_1^3+k_2^3)(k_2^3+k_3^3)(k_3^3+k_4^3). \tag{8}$$

Kemudian bandingkan Persamaan (7) dan Persamaan (8), sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$h^2f^{10}f_y\ :64a_{11}+64A+32B=96, \tag{9a}$$

$$h^3f^{11}f_{yy}\ :32a_{11}^2+32A^2+16B^2=32, \tag{9b}$$

$$h^4f^{12}f_{yyy}:\frac{32}{3}a_{11}^3+\frac{32}{3}A^3+\frac{16}{3}B^3=8, \tag{9c}$$

$$\begin{aligned}h^3f^{10}f_y^2\ :&192a_{11}^2+192A^2+48B^2-288a_{11}-288A-144B+96\alpha a_{11}^2+96\alpha A^2+48\alpha B^2-96\alpha a_{11}A+\\ &192a_{31}A+192a_{32}A+224a_{33}A+384a_{11}a_{21}+448a_{11}a_{22}+224a_{22}a_{33}+192a_{11}a_{31}+192a_{11}a_{33}=32,\end{aligned}$$

(9d)

$$\begin{aligned}h^4f^{10}f_y^3\ :&336a_{11}^3+336A^3+48B^3-504a_{11}^2-504A^2-144B^2-96a_{11}-96A-48B+240\alpha a_{11}^3+240\alpha A^3+\\ &48\alpha B^3+144\alpha a_{11}^2B+504a_{33}A^2-120\alpha a_{31}A^2-120\alpha a_{32}A^2-216\alpha a_{33}A^2+312a_{32}A^2+312a_{31}A^2\\ &+24\alpha a_{31}^2A+24\alpha a_{32}^2A+120\alpha a_{33}^2A+168a_{31}^2A+168a_{32}^2A+264a_{33}^2A-216a_{31}A-216a_{32}A\\ &-360a_{33}A+432a_{31}a_{32}A+144\alpha a_{32}a_{33}A+48\alpha a_{31}a_{32}A+144\alpha a_{31}a_{33}A+\\ &336a_{11}a_{32}^2+240a_{11}a_{33}^2+24\alpha a_{11}a_{21}^2+216\alpha a_{11}a_{22}^2-624\alpha a_{11}a_{32}a_{22}+384\alpha a_{31}a_{32}a_{11}+\\ &384\alpha a_{11}a_{32}a_{33}-432\alpha a_{11}a_{21}a_{33}-528\alpha a_{11}a_{22}a_{33}-432\alpha a_{11}a_{21}a_{31}+288\alpha a_{11}a_{31}a_{33}-648a_{11}a_{21}\\ &-576a_{11}a_{32}-432a_{11}a_{31}-432a_{11}a_{33}-936a_{11}a_{22}+144\alpha a_{11}a_{31}^2+1064a_{11}a_{22}a_{33}+240\alpha a_{11}a_{21}a_{22}\\ &+840a_{11}a_{21}a_{32}+240\alpha a_{11}a_{32}^2+144\alpha a_{11}a_{33}^2+840a_{11}a_{22}a_{31}+1032a_{11}a_{22}a_{32}+648a_{11}a_{21}a_{31}+\\ &840a_{11}a_{21}a_{33}+648a_{11}^2a_{32}+1152a_{11}a_{22}^2+456a_{11}^2a_{33}+1152a_{11}^2a_{22}+768a_{11}^2a_{22}+768a_{11}a_{21}^2+\\ &456a_{11}^2a_{31}-72\alpha a_{11}^2a_{22}+576a_{11}a_{32}a_{33}+480a_{11}a_{31}a_{33}+24\alpha a_{11}^2a_{21}+920a_{11}a_{21}a_{22}+576a_{11}a_{31}a_{32}=8,\end{aligned} \tag{9e}$$

$$\begin{aligned}h^4f^{11}f_yf_{yy}:&192a_{11}^3+192A^3+48B^3-144a_{11}^2-144A^2-72B^2-96a_{11}-96A-48B+96\alpha a_{11}^3+96\alpha A^3+\\ &48\alpha B^3-48\alpha a_{11}A^2-48\alpha a_{33}B^2+96a_{32}A^2-48\alpha a_{11}^2A+96a_{31}A^2+122a_{33}A^2-48\alpha a_{21}B^2\\ &-48\alpha a_{22}B^2-48\alpha a_{31}A^2-48\alpha a_{32}A^2+96a_{32}^2A+192a_{11}a_{21}^2+256a_{11}a_{22}^2+96a_{31}^2c_2+96a_{11}a_{31}^2+\\ &128a_{11}a_{32}^2+112a_{32}a_{11}^2+128a_{33}^2c_2+224a_{11}a_{32}a_{33}+224a_{32}a_{33}c_2+192a_{11}a_{31}a_{33}+\\ &224a_{31}a_{33}c_2+224a_{11}a_{31}a_{32}+192a_{31}a_{32}c_2+448a_{11}a_{21}a_{22}+192a_{11}^2a_{21}+224a_{11}^2a_{22}+\\ &96a_{11}^2a_{33}+96a_{11}a_{33}^2+96a_{11}^2a_{31}=32.\end{aligned} \tag{9f}$$

Parameter a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, dan a_{33} ditentukan dengan menyelesaikan secara serentak Persamaan (9a) – (9f) menggunakan Maple 16, maka diperoleh nilai parameter sebagai berikut:

$$a_{11}=\frac{1}{2},\ a_{21}=\frac{3}{8}\alpha,\ a_{22}=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\alpha,\ a_{31}=\frac{3}{4}\alpha,\ a_{32}=\frac{3}{4}\frac{\alpha(8+\alpha)}{-4+3\alpha},\ a_{33}=-\frac{1}{2}\frac{8+9\alpha^2}{-4+3\alpha}.$$

Substitusikan semua nilai parameter a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, dan a_{33} ke Persamaan (4), sehingga diperoleh Metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer dengan $p=1$ dan $p=4$ yang ditulis:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{3}\left((1-\alpha)\left(\frac{k_1+k_2}{2}+\frac{k_2+k_3}{2}+\frac{k_3+k_4}{2}\right)+\alpha\left(\frac{k_1^4+k_2^4}{k_1^3+k_2^3}+\frac{k_2^4+k_3^4}{k_2^3+k_3^3}+\frac{k_3^4+k_4^4}{k_3^3+k_4^3}\right)\right). \tag{10}$$

dengan

$$k_1=f(x_n,y_n),$$

$$k_2=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_1h\right),$$

$$k_3=f\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{3}{8}\alpha\,k_1h+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\alpha\right)k_2h\right),$$

$$k_4=f\left(x_n+h,y_n+\frac{3}{4}\alpha\,k_1h+\left(\frac{3}{4}\frac{\alpha(8+\alpha)}{-4+3\alpha}\right)k_2h+\left(-\frac{1}{2}\frac{8+9\alpha^2}{-4+3\alpha}\right)k_3h\right).$$

Persamaan (10) dikenal sebagai Runge Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer dengan $p=1$ dan $p=4$.

b. Galat Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik

Galat pemotongan lokal metode Runge Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer dengan $p=1$ dan $p=4$ dapat diperoleh dengan menggunakan (10) dan ekspansi deret Taylor.

Substitusikan nilai parameter yang telah diperoleh ke Persamaan (0) dan mengekspansikannya sampai dengan Orde-5 (h^5), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}y_{n+1}&=y_n+hf+\frac{1}{2}h^2ff_y+\frac{1}{6}h^3(ff_y^2+f^2f_{yy})+\frac{1}{24}h^4(f^3f_{yyy}+4f^2f_yf_{yy}+ff_y^3)+\frac{1}{4608}\\&\quad h^5(405\alpha^3ff_y^4+81\alpha^2f^2f_y^2f_{yy}+27\alpha^2ff_y^4+36\alpha f^2f_y^2f_{yy}+192\alpha ff_y^4-12\alpha f^3f_yf_{yyy}\\&\quad+72\alpha f^3f_{yy}^2+480f^2f_y^2f_{yy}+144f^3f_{yy}^2+40f^4f_{yyyy}+272f^3f_yf_{yyy}).\end{aligned} \tag{11}$$

Galat pemotongan lokal diperoleh dengan Persamaan (11) dengan ekspansi Deret Taylor sehingga diperoleh galat Metode Runge Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer sebagai berikut:

$$\begin{aligned}galat=h^5\Bigg(&\frac{1}{2880}f^4f_{yyyy}+\left(\frac{1}{1440}-\frac{1}{384}\alpha\right)f^3f_yf_{yyy}+\left(\frac{1}{64}\alpha-\frac{1}{480}\right)f^3f_{yy}^2+\\&\left(-\frac{9}{512}\alpha^2+\frac{1}{80}+\frac{1}{128}\alpha\right)f^2f_y^2f_{yy}+\left(-\frac{1}{120}+\frac{3}{512}\alpha^2+\frac{1}{24}\alpha+\frac{45}{512}\alpha^3\right)ff_y^4\Bigg).\end{aligned} \tag{12}$$

c. Simulasi Numerik

Hasil dari komputasi numerik diperoleh dengan membandingkan galat dari nilai $\alpha\to0$ sampai $\alpha\to1$ pada Modifikasi Runge Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi Deret Lehmer di Persamaan (10) dan membandingkan antara Metode Runge Kutta orde empat klasik (RKK) dan Runge-Kutta orde empat Klasik yang telah dimodifikasi yang diterapkan dalam contoh persamaan diferensial berikut:

Contoh 1

Diberikan persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$y' = y, \qquad y(0) = 1 \quad \text{dengan} \quad 0 \le x \le 1 \tag{13}$$

Jika solusi eksak yang diberikan adalah $Y = e^x$, maka penyelesaian Persamaan (13) dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat klasik kombinasi Deret Lehmer dengan n=10, $h = 0{,}1$ dan $y(0) = 1$ untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-2}$ dan $\alpha = 10^{-7}$ dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$ dan $\alpha = 10^{-7}$ untuk persamaan $y' = y$.

n	x	Perbandingan Galat RKKCCL				
		$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-7}$
1	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	9,2086E−07	6,4171E−08	5,0608E−09	8,0700E−08	8,4742E−08
3	0,2	2,0354E−06	1,4184E−07	1,1186E−08	1,7837E−07	1,8730E−07
4	0,3	3,3742E−06	2,3513E-07	1,8543E−08	2,9570E−07	3,1051E−07
5	0,4	4,9721E−06	3,4648E-07	2,7325E−08	4,3573E−07	4,5756E−07
6	0,5	6,8688E−06	4,7866E−07	3,7749E−08	6,0195E−07	6,3210E−07
7	0,6	9,1094E−06	6,3480E−07	5,0063E−08	7,9831E−07	8,3829E−07
8	0,7	1,1745E−05	8,1849E−07	6,4549E−08	1,0293E−06	1,0808E−06
9	0,8	1,4835E−05	1,0338E−06	8,1529E−08	1,3000E−06	1,3651E−06
10	0,9	1,8444E−05	1,2853E−06	1,0136E−07	1,6164E−06	1,6973E−06
11	1,0	2,2649E−05	1,5783E−06	1,2447E−07	1,9849E−06	2,0843E−06

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa galat paling kecil dari modifikasi metode RKKCCL ini diperoleh untuk $\alpha = 0{,}2$.

Selanjutnya akan dibandingkan nilai galat antara modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 10^{-7}$, metode RK-4 Klasik rata-rata Aritmatik (RKKAM) dan metode RK-4 Klasik rata-rata Harmonik (RKKHM yang diperlihatkan pada Table 2.

Tabel 2. Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-7}$, RKKAM, RKKHM untuk persamaan $y' = y$.

n	x	Solusi Eksak	Galat RKKCCL $\alpha = 0{,}2$	Galat RKKCCL $\alpha = 10^{-7}$	Galat RKKAM	Galat RKKHM
1	0,0	1,00000000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	1,10517091	5,0608E−09	8,4742E−08	8,4742E−08	3,1126E−07
3	0,2	1,22140275	1,1186E−08	1,8730E−07	1,8730E−07	6,8800E−07
4	0,3	1,34985880	1,8543E−08	3,1051E−07	3,1051E−07	1,1405E−06
5	0,4	1,49182469	2,7325E−08	4,5756E−07	4,5756E−07	1,6806E−06
6	0,5	1,64872170	3,7749E−08	6,3210E−07	6,3210E−07	2,3217E−06

n	x	Solusi Eksak	Galat RKKCCL $\alpha = 0{,}2$	Galat RKKCCL $\alpha = 10^{-7}$	Galat RKKAM	Galat RKKHM
7	0,6	1,82211880	5,0063E−08	8,3829E−07	8,3829E−07	3,0791E−06
8	0,7	2,01375270	6,4549E−08	1,0808E−06	1,0808E−06	3,9701E−06
9	0,8	2,22554092	8,1529E−08	1,3651E−06	1,3651E−06	5,0145E−06
10	0,9	2,45960311	1,0136E−07	1,6973E−06	1,6973E−06	6,2346E−06
11	1,0	2,71828182	1,2447E−07	2,0843E−06	2,0843E−06	7,6559E−06

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa Modifikasi RKKCCL memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan Metode RKKAM dan RKKHM. Nilai galat terbaik yaitu pada $\alpha = 0{,}2$ dan $\alpha \to 0$ menghasilkan nilai galat yang mendekati nilai galat Metode RKKAM.

Contoh 2

Diberikan persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$y' = -y, \qquad y(0) = 1 \quad \text{dengan} \quad 0 \le x \le 1 \tag{14}$$

Jika solusi eksak yang diberikan adalah $Y = e^{-x}$, maka penyelesaian Persamaan (14) dengan Metode RKKCCL dengan n=10, $h = 0{,}1$ dan $y(0) = 1$ untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-2}$ dan $\alpha = 10^{-7}$. Nilai perbandingan galat masing-masing α dari Persamaan (14) pada Table 3.

Tabel 3 Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$ dan $\alpha = 10^{-7}$ untuk persamaan $y' = -y$

n	x	Perbandingan Galat RKKCCL				
		$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-7}$
1	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	1,0493E−06	7,7191E−08	1,3613E−08	7,7663E−08	8,1963E−08
3	0,2	1,8990E−06	1,3969E−07	2,4635E−08	1,4054E−07	1,4832E−07
4	0,3	2,5774E−06	1,8959E−07	3,3436E−08	1,9075E−07	2,0131E−07
5	0,4	3,1096E−06	2,2873E−07	4,0339E−08	2,3013E−07	2,4288E−07
6	0,5	3,5171E−06	2,5871E−07	4,5626E−08	2,6029E−07	2,7471E−07
7	0,6	3,8189E−06	2,8091E−07	4,9541E−08	2,8263E−07	2,9828E−07
8	0,7	4,0314E−06	2,9654E−07	5,2297E−08	2,9835E−07	3,1487E−07
9	0,8	4,1688E−06	3,0665E−07	5,4081E−08	3,0853E−07	3,2561E−07
10	0,9	4,2436E−06	3,1215E−07	5,5051E−08	3,1406E−07	3,3145E−07
11	1,0	4,2664E−06	3,1383E−07	5,5347E−08	3,1575E−07	3,3324E−07

Berdasarkan Tabel 3 terlihat bahwa galat dari Modifikasi Metode RKKCCL ini lebih akurat dibandingkan dengan Metode RK-4 klasik sebelum dimodifikasi. galat terbaik yaitu pada nilai $\alpha = 0{,}2$.

Selanjutnya akan dibandingkan nilai galat antara Modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, Modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 10^{-7}$, Metode RK-4 klasik rata-rata aritmatik (RKKAM) dan Metode RK-4 klasik rata-rata harmonik (RKKHM) yang berikan pada Tabel 4

Tabel 4. Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-7}$, RKKAM, RKKHM untuk persamaan $y' = -y$.

n	x	Solusi Eksak	Galat RKKCCL $\alpha = 0{,}2$	Galat RKKCCL $\alpha = 10^{-7}$	Galat RKKAM	Galat RKKHM
1	0,0	1,00000000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	0,90483741	1,3613E − 08	8,1963E − 08	8,1963E − 08	3,2462E − 07
3	0,2	0,81873075	2,4635E − 08	1,4832E − 07	1,4832E − 07	5,8746E − 07
4	0,3	0,74081822	3,3436E − 08	2,0131E − 07	2,0131E − 07	7,9733E − 07
5	0,4	0,67032004	4,0339E − 08	2,4288E − 07	2,4288E − 07	9,6194E − 07
6	0,5	0,60653065	4,5626E − 08	2,7471E − 07	2,7471E − 07	1,0880E − 07
7	0,6	0,54881163	4,9541E − 08	2,9828E − 07	2,9828E − 07	1,1813E − 07
8	0,7	0,49658553	5,2297E − 08	3,1487E − 07	3,1487E − 07	1,2470E − 07
9	0,8	0,44932390	5,4081E − 08	3,2561E − 07	3,2561E − 07	1,2896E − 07
10	0,9	0,40656965	5,5051E − 08	3,3145E − 07	3,3145E − 07	1,3127E − 07
11	1,0	0,36787944	5,5347E − 08	3,3324E − 07	3,3324E − 07	1,3198E − 07

Berdasarkan Tabel 4 terlihat bahwa Modifikasi RKKCCL memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan Metode RKKAM dan RKKHM. Nilai galat terbaik yaitu pada $\alpha = 0{,}2$ dan $\alpha \to 0$ menghasilkan nilai galat yang mendekati nilai galat Metode RKKAM.

Contoh 3

Diberikan persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$y' = \frac{1}{y},\ y(0) = 1 \quad \text{dengan} \quad 0 \le x \le 1$$

(15)

Jika solusi eksak yang diberikan adalah $Y = \sqrt{2x+1}$, maka penyelesaian persamaan (15) dengan Metode Runge Kutta orde empat klasik kombinasi Deret Lehmer (RKKCCL) dengan n=10, $h = 0{,}1$ dan $y(0) = 1$ untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-2}$ dan $\alpha = 10^{-7}$. Nilai perbandingan galat masing-masing α dari Persamaan (15) dapat dilihat pada Table 4.

Tabel 5 Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}3$, $\alpha = 10^{-2}$, $\alpha = 10^{-4}$ dan $\alpha = 10^{-7}$ untuk persamaan $y' = 1/y$.

n	x	$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-7}$
1	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	1,0878E − 06	3,6666E − 07	2,9227E − 07	1,5699E − 07	1,4972E − 07
3	0,2	1,5139E − 06	5,1004E − 07	4,0651E − 07	2,1819E − 07	2,0809E − 07
4	0,3	1,6800E − 06	5,6583E − 07	4,5092E − 07	2,4193E − 07	2,3071E − 07
5	0,4	1,7332E − 06	5,8362E − 07	4,6507E − 07	2,4944E − 07	2,3787E − 07
6	0,5	1,7343E − 06	5,8390E − 07	4,6527E − 07	2,4950E − 07	2,3792E − 07
7	0,6	1,7107E − 06	5,7590E − 07	4,5888E − 07	2,4604E − 07	2,3471E − 07
8	0,7	1,6756E − 06	5,6407E − 07	4,4945E − 07	2,4095E − 07	2,2976E − 07
9	0,8	1,6358E − 06	5,5063E − 07	4,3873E − 07	2,3519E − 07	2,2426E − 07
10	0,9	1,5946E − 06	5,3673E − 07	4,2765E − 07	2,2923E − 07	2,1858E − 07

n	x	$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}3$	$\alpha = 0{,}2$	$\alpha = 10^{-2}$	$\alpha = 10^{-7}$
11	1,0	1,5537E−06	5,2297E−07	4,1668E−07	2,2334E−07	2,1296E−07

Berdasarkan Tabel 5 terlihat bahwa Modifikasi Metode RKKCCL Lebih baik daripada Metode RKKAM dan RKKHM. Nilai galat $\alpha \to 1$ mempunyai nilai galat yang lebih kecil dan nilai $\alpha \to 0$ menghasilkan nilai galat yang mendekati nilai galat Metode RKKAM.

Selanjutnya akan dibandingkan nilai galat antara Modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, Modifikasi RKKCCL untuk $\alpha = 10^{-7}$, Metode RK-4 klasik rata-rata aritmatik (RKKAM) dan metode RK-4 klasik rata-rata harmonik (RKKHM) yang ditunjukkan pada Table 6.

Tabel 6 Perbandingan Galat dari Metode RKKCCL untuk $\alpha = 0{,}2$, $\alpha = 10^{-7}$, RKKAM, RKKHM untuk persamaan y' = 1/y.

n	x	Solusi Eksak	Galat RKKCCL $\alpha = 0{,}2$	Galat RKKCCL $\alpha = 10^{-7}$	Galat RKKAM	Galat RKKHM
1	0,0	1,0000000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,1	1,09544511	2,9227E−07	1,4972E−07	8,1964E−08	1,8686E−07
3	0,2	1,18321595	4,0651E−07	2,0809E−07	1,4832E−07	2,6033E−07
4	0,3	1,26491106	4,5092E−07	2,3071E−07	2,0131E−07	2,8910E−07
5	0,4	1,34164078	4,6507E−07	2,3787E−07	2,4288E−07	2,9840E−07
6	0,5	1,41421356	4,6527E−07	2,3792E−07	2,7471E−07	2,9870E−07
7	0,6	1,48323969	4,5888E−07	2,3471E−07	2,9828E−07	2,9472E−07
8	0,7	1,54919333	4,4945E−07	2,2976E−07	3,1487E−07	2,8874E−07
9	0,8	1,61245154	4,3873E−07	2,2426E−07	3,2561E−07	2,8192E−07
10	0,9	1,67332053	4,2765E−07	2,1858E−07	3,3145E−07	2,7485E−07
11	1,0	1,73205080	4,1668E−07	2,1296E−07	3,3324E−07	2,6784E−07

Berdasarkan Tabel 6 terlihat bahwa Modifikasi Metode RKKCCL mempunyai galat yang lebih akurat dibandingkan Metode RKKAM dan RKKHM. Nilai $\alpha \to 1$ mempunyai nilai galat yang lebih kecil dan nilai $\alpha \to 0$ menghasilkan nilai galat yang mendekati nilai galat Metode RKKAM.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa galat dari metode Runge Kutta orde empat klasik yang dimodifikasi (RKKCCL) lebih baik daripada metode Runge Kutta orde empat klasik (RKK) untuk $y' = y$ dan $y' = -y$ pada $\alpha = 0{,}2$, sedangkan untuk $y' = 1/y$ menunjukkan hasil galat dari modifikasi Metode Runge Kutta orde empat klasik (RKKCCL) hampir sama dengan Modifikasi Metode Runge Kutta orde empat klasik (RKK).

DAFTAR PUSTAKA

Evans, D. J., 1991. A New 4th Order Runge-Kutta Method For Initial Value Problem With Error Control. *International Journal of Computer Mathematics* 71, 217–227.

Evans, D. J., dan N. Yaacob., 1995. A Fourth Order Runge-Kutta Method Based on The Heronian Mean Formula”. *International Journal of Computer Mathematics* 58, 103–115.

Evans, D. J., dan A. R. Yaakub., 1995. A New Runge-Kutta (4,4) Method. *International*

Journal of Computer Mathematics 58, 169−187.

Evans, D. J., dan A. R. Yaakub., 1996. A New Fifth Order Weighted Runge-Kutta Formula. *International Journal of Computer Mathematics* 59, 227−243.

Evans, D. J., dan A. R. Yaakub., 2002. A Fifth Order Runge-Kutta RK (5,5) Method With Error Control. *International Journal of Computer Mathematics* 79, 1179−1825.

Jayanti, E. D., M. Imran., dan Syamsudhuha., 2018. A Third Order Runge-Kutta Method Based on Convex Combination of Lehmer Means. *Journal of Mathematical and Computation Science* 8(6), 673−682.

Lapidus, L., dan J. H. Seinfeld., 1971. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Academic Press, New York.

Murugesan, K., dan D. P. Dhayabaran., 2002. A Fourth Order Embedded Runge-Kutta RKACeM (4,4) Method Based on Arithmetic and Centroidal Means with Error Control. *International Journal of Computer Mathematics* 79, 247−269.

Ponalagusamy, R., 2011. Development of New Fifth-Order Fifth-Stage Runge-Kutta Method Based By Heronian Mean. *International Journal of Engineering Science, Advanced Computing and Bio-Technology* 2(4), 162−197.

Sanugi, B. B., dan D. J. Evans., 1994. A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean. *International Journal of Computer Mathematics* 50, 113−118.

Wazwaz, A. M., 1991. Modified Numerical Methods Based on Arithmetic and Geometric Means. *International Journal of Computer Mathematics* 4, 49−52.

Wazwaz., A. M., 1994. A Comparison of Modified Runge-Kutta Formulas Based on Variety of Means. *International Journal of Computer Mathematics* 50, 105−112.

Yaacob, N., dan B. Sanugi., 1998. A New Fourth-Order Embedded Method Based on the Harmonic Mean, *Matematika*. 14, 1−6.

Yaakub. A. R., dan D. J. Evans., 1999. A Fourth Order Runge-Kutta RK(4,4) Method with Error Control. *International Journal of Computer Mathematics* 71, 383−411.