

Representasi Aljabar dan Geometri Interaktif dalam Permasalahan Kinematika Invers PRoM-120

Adriyan

Department of Mechanical Engineering, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Riau
Jl. Tuanku Tambusai Ujung, Pekanbaru, Indonesia
E-mail: adriyan@umri.ac.id

Abstract

PRoM-120 is a spatial parallel manipulator with three degrees of freedom, namely one translational and two rotational motions at its end-effector. The manipulator is composed by a 2(PRU)-PRS kinematics chain, with the active joints driven by linear actuators. This study aims to determine the inverse kinematics solution by applying algebraic solution and interactive geometry. The algebraic solution provides an analytic closed-form solution to the inverse kinematics. Meanwhile, the use of interactive geometry through GeoGebra software is conducted by first placing geometric objects such as points, lines, circles, polygons, in its workspace. Subsequently, correlations between these objects can be explored based on geometric properties between these objects, such as intersection or tangency. Consequently, the answer to inverse kinematics is the result of exploring geometric properties between geometric objects in the form of intersection or tangency points. Thus, this interactive geometry method produces answers and visualizations of inverse kinematics simultaneously without having to find the closed-form solution.

Keywords: PRoM-120, inverse kinematic, algebraic representation, interactive geometry representation.

Abstrak

PRoM-120 merupakan manipulator paralel ruang dengan derajat kebebasan tiga yaitu satu gerakan translasi dan dua gerakan rotasi pada *end-effector*-nya. Manipulator ini disusun oleh rantai kinematika 2(PRU)-PRS, dengan sambungan aktif berupa aktuator linier. Kajian yang disajikan dalam manuskrip bertujuan untuk menentukan jawab kinematika inversnya dengan menerapkan penyelesaian secara aljabar dan geometri interaktif. Penyelesaian secara aljabar memberikan jawab analitik tertutup kinematika invers. Sementara itu, penggunaan geometri interaktif melalui perangkat lunak GeoGebra dilakukan dengan menempatkan objek geometri seperti titik, garis, lingkaran, poligon, pada ruang kerjanya terlebih dahulu. Selanjutnya, korelasi antar objek-objek ini dapat dieksplorasi berdasarkan sifat-sifat geometri antar objek-objek ini, seperti perpotongan atau persinggungan. Sebagai konsekuensinya, jawab kinematika invers merupakan hasil eksplorasi sifat-sifat geometri antar objek geometri dalam bentuk titik potong atau titik singgung. Dengan demikian, metode geometri interaktif ini menghasilkan jawab dan visualisasi kinematika invers secara bersamaan tanpa harus menemukan jawab tertutupnya.

Kata kunci: PRoM-120, kinematika invers, representasi aljabar, representasi geometri interaktif.

1. Pendahuluan

Manipulator paralel dengan mobilitas kurang dari 6 atau dikenal dengan manipulator paralel *lower mobility* (mobilitas rendah), yang disingkat MPMR, diaplikasikan untuk memanipulasi objek dengan derajat kebebasan kurang dari 6. Penerapannya berdampak pada jumlah aktuator atau penggerak yang digunakan menjadi berkurang dibandingkan dengan manipulator paralel dengan 6 derajat kebebasan. Manipulator ini dikenal dengan manipulator paralel *full mobility* (mobilitas penuh) atau disingkat MPMP. Potensi penggunaan MPMR yang beragam dapat ditemui pada manipulator paralel untuk proses

pick-and-place [1], alat uji ban kendaraan [2], dan perangkat memasak [3].

Manipulator paralel mobilitas rendah untuk memanipulasi objek di ruang dapat dikategorikan atas $aTbR$, dengan $a, b \leq 3$ dan $a + b < 6$. Dalam hal ini T dan R masing-masingnya menyatakan derajat kebebasan translasi dan rotasi. Berdasarkan $aTbR$, dapat disusun setidaknya sembilan jenis MPMR untuk mobilitas sebesar 3, 4, dan 5 yaitu $3T$, $3R$, $1T2R$, $2T1R$, $3T1R$, $2T2R$, $1T3R$, $3T2R$, dan $2T3R$. Untuk MPMR dengan mobilitas 3 terutama $3R$, $1T2R$, dan $2T1R$ telah dikaji secara intensif untuk dapat digunakan sebagai manipulator hibrid [4].

Selanjutnya, salah satu MPMR dengan mobilitas 3 yaitu **1T2R** dapat dikonstruksi dengan susunan *limb* berbentuk T (mekanisme T). Mekanisme T ini memiliki fitur yang kompleks jika dibandingkan dengan konfigurasi *limb* simetris karena susunan rantai kinematik yang berbeda pada setiap *limb*-nya [5]. Salah satu fitur yang menarik pada MPMR **1T2R** dengan mekanisme T yaitu adanya gerak parasitik pada *end-effector* manipulator. Gerak parasitik ini memberikan kekurangan berupa tereduksinya akurasi memanipulasi dan kesulitan dalam pengkalibrasian [6]. Meskipun demikian, gerak parasitik ini dapat ditemukan relasi matematisnya dengan *end-effector space* manipulator dalam tahapan analisis kinematika posisi (invers atau langsung).

Permasalahan kinematika invers manipulator secara umum pada intinya merupakan persoalan geometri dan aljabar. Kajian-kajian kinematika invers MPMR **1T2R** yang ditemui dari berbagai literatur menyajikan penyelesaiannya secara umum dari sisi aljabar [7]. Eksplorasi kajian kinematika invers dari sisi geometri akan menyediakan visualisasi sederhana kinematika invers ini dalam memudahkan pemahaman atau interpretasinya. Salah satu kajian yang dilakukan untuk menggabungkan penyelesaian dari sisi aljabar dan geometri adalah dengan menggunakan aljabar geometri konformal [8]. Melalui kajian dengan aljabar geometri konformal ini diperoleh interpretasi geometri dan analisis kinematika invers secara sederhana berdasarkan penerapan objek geometri dan kalkulasi aljabar linier.

Selanjutnya, kajian kinematika invers secara geometri interaktif dapat dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak geometri dan aljabar GeoGebra [9–11]. Perangkat lunak ini dapat menghasilkan representasi aljabar setiap jenis geometri bidang atau geometri ruang. Secara geometri, penggunaan GeoGebra memungkinkan penentuan kinematika invers tanpa melibatkan hubungan matematis yang cukup kompleks dalam prosesnya. Hal ini dibuktikan dengan kajian penggunaan GeoGebra untuk memperoleh penyelesaian kinematika invers dan kinematika langsung manipulator paralel Delta [12].

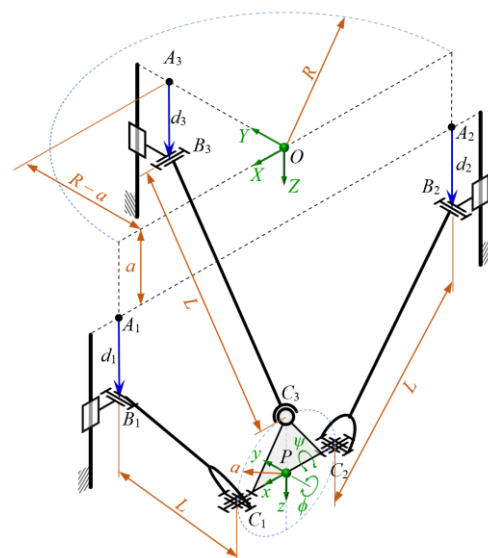
Meskipun kajian penerapan GeoGebra ini dilakukan untuk MPMR **3T** Delta, namun konsepnya dapat diaplikasikan ke manipulator paralel lainnya baik MPMR ataupun MPMP. Manipulator paralel memiliki konstruksi dengan rantai kinematik *loop* tertutup. Setiap sambungan yang dimilikinya dapat digunakan untuk mengkonstruksi geometri bidang atau geometri ruang seperti lingkaran, garis, dan bola. Geometri-geometri ini dapat merepresentasikan gerakan yang dihasilkan oleh sambungan. Titik-titik

potong yang dihasilkan antara perpotongan atau persinggungan geometri-geometri membentuk konfigurasi manipulator paralel itu sendiri.

Beranjak dari ide ini, artikel ini menyajikan kajian representasi aljabar dan geometri interaktif permasalahan kinematika invers pada PRoM-120. PRoM-120 merupakan MPMR **1T2R** dengan mekanisme T yang memiliki konfigurasi rantai kinematik 2(PRU)-PRS [13, 14]. Simbol P, R, U, dan S ini masing-masingnya menotasikan sambungan prismatic, revolusi, universal, dan sferis. Garis bawah pada simbol sambungan menunjukkan bahwa sambungan itu merupakan sambungan aktif (diaktuiasi). Selanjutnya, bagian 2 mendeskripsikan metode penyelesaian masalah kinematika invers melalui aljabar dan geometri interaktif. Bagian 3 menyajikan hasil beserta pembahasan permasalahan kinematika invers ini. Akhirnya, bagian 4 merupakan kesimpulan dari kajian yang dibahas dalam manuskrip ini.

2. Metodologi

Kinematika invers pada PRoM-120 yang dibahas dalam manuskrip ini memberikan penyelesaian secara aljabar dan geometri interaktif. Konfigurasi dari PRoM-120 ini secara umum ditampilkan di dalam **Gambar 1**. Manipulator ini terdiri atas 3 parameter kinematik yaitu panjang batang di setiap *limb*, L , radius base R , dan radius platform, a . Titik P pada platform merupakan *end-effector* manipulator ini. Seperti yang telah dinyatakan di dalam [13, 14], PRoM-120 memiliki 3 derajat kebebasan (**1T2R**) yang dinyatakan dengan 3 variabel pada *end-effector space*-nya, yaitu ψ , ϕ , dan z . Posisi *end-effector* dinyatakan dengan titik P pada platform-nya.



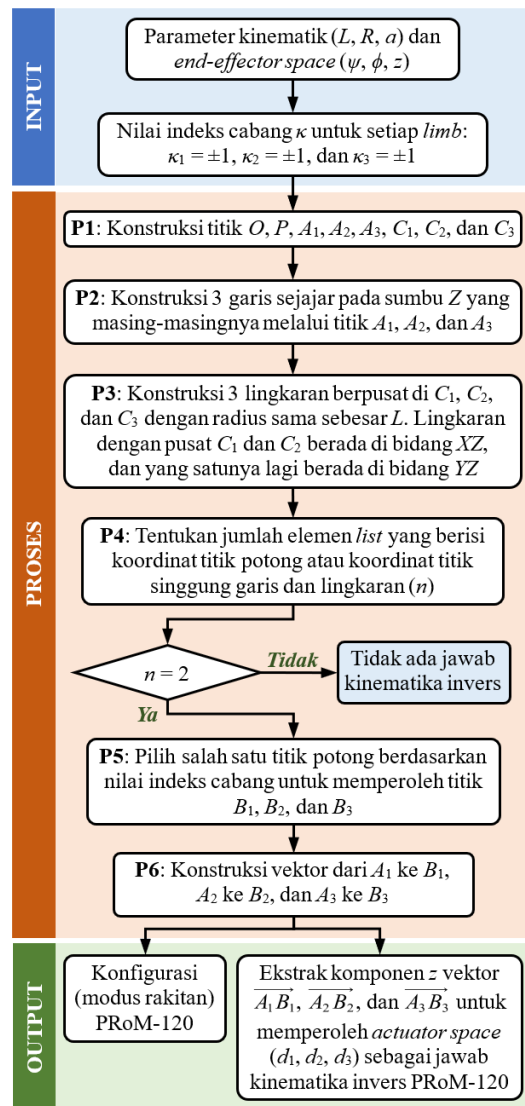
Gambar 1. PRoM-120: manipulator paralel ruang **1T2R** dengan rantai kinematik 2(PRU)-PRS [13, 14].

Untuk memenuhi gerakan 3 derajat kebebasan, manipulator ini diaktuatori oleh 3 penggerak linier yang membentuk suatu *actuator space*, yaitu d_1 , d_2 , dan d_3 . Untuk itu, titik P pada *platform* yang bergerak dapat dinyatakan relasinya dengan titik O sebagai titik acuan pada sistem referensi tetap melalui vektor-vektor posisi ke titik sambungan untuk setiap *limb*-nya. Dengan demikian, penyelesaian secara aljabar berupa jawab tertutup (*closed-form solution*) dapat ditentukan berdasarkan relasi antara *actuator space* dengan *end-effector space*.

Melalui jawab tertutup ini diperoleh indeks cabang κ , bernilai ± 1 untuk setiap *limb*, yang menentukan variasi modus rakitan (*assembly modes*) PRoM-120. Selanjutnya, nilai-nilai numerik jawab tertutup kinematika invers PRoM-120 dapat dikalkulasi untuk berbagai variasi parameter kinematik berikut dengan posisi dan orientasi *end-effector*-nya. Untuk memudahkan proses perhitungan secara numerik digunakan pustaka python untuk komputasi *array*, yaitu NumPy [15].

Sementara itu, penyelesaian kinematika invers PRoM-120 dengan menggunakan geometri interaktif dilakukan dengan perangkat lunak GeoGebra [9]. Dalam penerapannya, penentuan kinematika invers dengan geometri interaktif ini dilakukan berdasarkan diagram alir yang ditampilkan pada **Gambar 2**. Penerapan geometri interaktif ini diawali dengan memberikan input berupa dimensi parameter kinematik (L, R, a) serta variabel *end-effector space* (ψ, ϕ, z). Input selanjutnya, nilai indeks cabang κ untuk setiap *limb* dinyatakan sebagai input untuk menentukan modus rakitan PRoM-120 yang akan divisualisasikan. Input ini diberikan dengan menggunakan fungsi Slider.

Proses pertama (**P1**) dilakukan dengan mengkonstruksi titik $O, P, A_1, A_2, A_3, C_1, C_2$, dan C_3 melalui penggunaan fungsi Point di GeoGebra. Titik C_1, P, C_2 , dan C_3 dapat dihubungkan untuk membentuk bidang *platform* PRoM-120 dengan memanfaatkan fungsi Polygon. Berikutnya, melalui titik-titik A_1, A_2 , dan A_3 dapat dibuat masing-masingnya garis yang sejajar dengan sumbu Z (proses kedua atau **P2**) menggunakan fungsi Line. Pada **P2** ini diperoleh sebanyak 3 garis yang sejajar dengan sumbu Z dan menjadi arah gerakan dari sambungan prismatik. Pada proses **P3**, tiga buah lingkaran akan dikonstruksi dengan pusat di titik C_1, C_2 , dan C_3 dengan radius sebesar L melalui penerapan fungsi Circle. Ketiga lingkaran ini dibuat pada dua buah bidang yaitu bidang XZ dan YZ . Dalam hal ini, lingkaran dengan pusat di C_1, C_2 berada pada bidang XZ , sedangkan lingkaran dengan pusat C_3 berada di bidang YZ .



Gambar 2. Alur penentuan penyelesaian kinematika invers PRoM-120 melalui geometri interaktif dengan GeoGebra.

Selanjutnya, proses keempat (**P4**) akan menentukan koordinat titik potong atau koordinat titik singgung masing-masing garis dan lingkaran yang telah dibuat pada **P2** dan **P3**. Fungsi *Intersect* digunakan dalam proses keempat ini. Ketika suatu garis melalui sebuah lingkaran maka garis dan lingkaran akan berpotongan di dua titik. Kasus khususnya terjadi ketika garis dan lingkaran dalam kondisi bersinggungan yang hanya bersinggungan di satu titik. Dalam hal ini, GeoGebra menghasilkan *list* dua elemen baik untuk garis dan lingkaran yang berpotongan (dua titik potong berbeda) atau bersinggungan (satu titik singgung yang mengisi kedua elemen *list*).

Untuk itu, jumlah elemen *list* yang berisi koordinat titik potong atau koordinat titik singgung dapat ditentukan karena ini berkaitan dengan ada atau tidaknya jawab kinematika invers. Fungsi *Length* dari *list* dapat digunakan

untuk menghitung jumlah elemennya (n). Jika $n = 2$ maka jawab kinematika inversnya ada, sedangkan untuk $n \neq 2$, maka tidak ada jawab kinematika invers (garis sejajar sumbu z tidak ada yang memotong atau menyinggung lingkaran).

Ketika jawab kinematikanya ada, $n = 2$, proses kelima atau **P5** berlangsung dengan memilih salah satu dari dua koordinat di *list*. Pemilihan ini disesuaikan dengan nilai indeks cabang ($\kappa_1 = \pm 1$, $\kappa_2 = \pm 1$, dan $\kappa_3 = \pm 1$) yang akan menunjukkan modus rakitan PRoM-120. Koordinat yang terpilih ini merupakan titik B_1 , B_2 , dan B_3 pada PRoM-120. Tahapan ini dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi *If* secara bersarang (*nested If*). Melalui titik B_1 , B_2 , dan B_3 yang telah diperoleh dapat dibuat segmen garis B_1C_1 , B_2C_2 , dan B_3C_3 yang merepresentasikan batang biner pada setiap *limb* PRoM-120. Batang biner ini dibuat dengan memanfaatkan fungsi *Segment*.

Untuk proses terakhir **P6**, tiga buah vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, dan $\overrightarrow{A_3B_3}$ dapat dikonstruksi yang masing-masingnya melalui titik A_1 dan B_1 , A_2 dan B_2 , serta A_3 dan B_3 , menggunakan fungsi *Vector*. Ketiga vektor ini merepresentasikan vektor posisi sambungan prismatic terhadap masing-masing ketiga titik A sebagai besarnya perubahan aktuatur PRoM-120. Dengan demikian, konfigurasi (modus rakitan) dan jawab kinematika invers (*actuator space*) PRoM-120 dapat ditampilkan dan diperoleh setelah **P6** ini selesai dilakukan. Jawab kinematika invers (d_1 , d_2 , d_3) diperoleh dengan mengekstrak komponen z vektor $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, dan $\overrightarrow{A_3B_3}$ menggunakan fungsi z .

Penyelesaian kinematika invers berdasarkan langkah-langkah dimaksud memiliki jawab yang secara eksplisit bukan dalam bentuk jawab tertutup. Namun demikian, secara langkah penyelesaian secara geometri interaktif relatif sederhana dibandingkan dengan metode aljabar. Pengikutsertaan antar muka kendali form (*form control*) untuk memilih parameter kinematik, *end-effector space*, atau modus rakitan dapat digunakan secara interaktif tanpa harus secara eksplisit diprogram.

3. Hasil dan Pembahasan

Penerapan kedua metode ini pada hakikatnya memiliki kesamaan yang diawali dengan memanfaatkan hubungan vektor posisi pada setiap sambungan di masing-masing *limb*-nya. Namun, representasi vektor posisi ini diperlakukan berbeda melalui penerapan kedua metode ini.

3.1. Representasi Aljabar Kinematika Invers: Jawab Analitik Tertutup

Penentuan hubungan antara titik O dengan titik P pada PRoM-120 (lihat **Gambar 1**) dapat dilakukan dengan menentukan aljabar vektor posisi seperti yang dinyatakan berikut ini

$$\overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} = \overrightarrow{OC_i}, \quad (1)$$

dengan $\overrightarrow{OC_i} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{R}_{(\psi, \phi)} \overrightarrow{PC_i}$ dan indeks i bernilai sejumlah *limb* manipulator, yaitu $i = 1, 2, 3$. Selanjutnya, nilai dari setiap vektor posisi yang dinyatakan oleh persamaan (1) didefinisikan oleh **Tabel 1**.

Tabel 1.
Vektor posisi pada persamaan (1).

Nama vektor	Vektor posisi
$\overrightarrow{OB_1}$	$(R \ 0 \ a + d_1)^T$
$\overrightarrow{OB_2}$	$(-R \ 0 \ a + d_2)^T$
$\overrightarrow{OB_3}$	$(0 \ R - a \ d_3)^T$
$\overrightarrow{B_1C_1}$	$(-L s_\alpha \ 0 \ L c_\alpha)^T$
$\overrightarrow{B_2C_2}$	$(L s_\alpha \ 0 \ L c_\alpha)^T$
$\overrightarrow{B_3C_3}$	$(0 \ -L s_\alpha \ L c_\alpha)^T$
$\overrightarrow{OP}$	$(x \ y \ z)^T$
$\overrightarrow{PC_1}$	$(a \ 0 \ 0)^T$
$\overrightarrow{PC_2}$	$(-a \ 0 \ 0)^T$
$\overrightarrow{PC_3}$	$(0 \ 0 \ -a)^T$

Kemudian, $\mathbf{R}_{(\psi, \phi)} = \mathbf{R}_{Y, \phi} \mathbf{R}_{X, \psi}$ merupakan matrik rotasi yang menyatakan rotasi titik P terhadap sistem referensi tetap terhadap sumbu Y dan X masing-masingnya sebesar ϕ dan ψ , yang dinyatakan secara matematis oleh

$$\mathbf{R}_{(\psi, \phi)} = \mathbf{R}_{Y, \phi} \mathbf{R}_{X, \psi} = \begin{bmatrix} c_\phi & s_\phi s_\psi & s_\phi c_\psi \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ -s_\phi & c_\phi s_\psi & c_\phi c_\psi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Notasi $c_\angle$ dan $s_\angle$ masing-masingnya merupakan singkatan kosinus dan sinus suatu sudut $\angle$, dengan $\angle = \{\alpha, \psi, \phi\}$.

PRoM-120 ini memiliki gerak parasistik di *platform*-nya, [13, 14]. Gerak parasistik ini dapat dengan mudah ditentukan dengan kondisi jika perpindahan titik P juga terjadi selain dalam arah derajat kebebasan translasinya, z . Untuk, penerapan prinsip ortogonalitas pada vektor $\overrightarrow{OC_i}$ dan vektor satuan yang tegak lurus terhadap bidang *limb*, $\hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$ dan $\hat{\mathbf{u}}_3 = (1 \ 0 \ 0)^T$, akan menghasilkan hubungan

untuk gerak parasitik ini. Dengan demikian gerak parasitik ini diberikan oleh

$$x = a s_{\phi} c_{\psi}; \quad y = 0. \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3) diketahui bahwa gerak parasitik hanya terjadi dalam arah sumbu X.

Setelah diperolehnya gerak parasitik ini, persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk

$$\overrightarrow{B_i C_i} = \overrightarrow{O C_i} - \overrightarrow{O B_i}. \quad (4)$$

Melalui persamaan (4) ini akan dieliminasi sudut sambungan pasif α di posisi B_i dengan memanfaatkan nilai panjang vektor-vektor yang berada di ruas kiri dan kanan. Kondisi ini secara matematis diberikan oleh

$$\overrightarrow{B_i C_i} \cdot \overrightarrow{B_i C_i} = (\overrightarrow{O C_i} - \overrightarrow{O B_i}) \cdot (\overrightarrow{O C_i} - \overrightarrow{O B_i}). \quad (5)$$

Dengan demikian, berdasarkan persamaan (5) diperoleh hubungan matematis untuk setiap *limb* PRoM-120, yaitu

$$L^2 = X_i^2 + (Z_i - d_i)^2, \quad (6)$$

dengan nilai X_i dan Z_i diberikan melalui **Tabel 2**.

Tabel 2.

Nilai X_i dan Z_i untuk setiap *limb* pada persamaan (5).

<i>Limb</i>	X_i	Z_i
1	$a s_{\phi} c_{\psi} + a c_{\phi} - R$	$z - a s_{\phi} - a$
2	$a s_{\phi} c_{\psi} - a c_{\phi} + R$	$z + a s_{\phi} - a$
3	$a s_{\psi} + a - R$	$z - a c_{\phi} c_{\psi}$

Akhirnya, jawab kinematika invers PRoM-120 dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan (6) untuk *actuator space*, d_i , yaitu

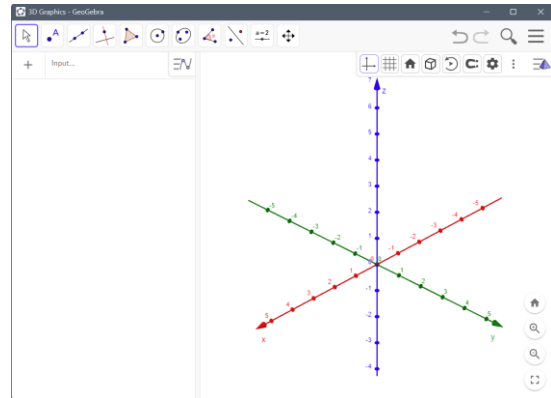
$$d_i = Z_i - \kappa \sqrt{L^2 - X_i^2}, \quad (7)$$

dengan κ merupakan indeks cabang dari suatu akar kuadrat yang dapat bernilai ± 1 . Berdasarkan tanda κ ini, PRoM-120 memiliki 8 kombinasi modus rakitan (*assembly modes*), yaitu $(-, -, -)$, $(-, -, +)$, $(-, +, -)$, $(-, +, +)$, $(+, -, -)$, $(+, -, +)$, $(+, +, -)$, dan $(+, +, +)$. Untuk rakitan PRoM-120 yang ditunjukkan pada **Gambar 1** memiliki modus rakitan $(+, +, +)$.

Kondisi nilai $L^2 - X_i^2$ pada persamaan (7) yang berada di bawah tanda akar jika bernilai kurang dari nol menunjukkan tidak adanya penyelesaian kinematika invers. Secara fisik, kondisi ini diberikan ketika posisi *end-effector* berada di luar batas *workspace* manipulator itu sendiri.

3.2. Kinematika Invers dengan Geometri Interaktif

Permasalahan kinematika invers PRoM-120 dapat ditemukan jawabnya dengan menerapkan geometri interaktif melalui penggunaan aplikasi GeoGebra berdasarkan alur yang diberikan melalui **Gambar 2**. PRoM-120 merupakan manipulator paralel ruang sehingga digunakan mode 3D Graphics GeoGebra yang antar mukanya ditunjukkan oleh **Gambar 3**. Untuk sumbu z digunakan pengaturan bahwa hanya bagian z positif saja yang digunakan dalam kajian ini. Seluruh alur yang telah dideskripsikan dikerjakan menggunakan panel kiri yang dapat diketikkan fungsi-fungsi yang bersesuaian pada kotak *command* "Input...".



Gambar 3. Antarmuka mode 3D Graphics GeoGebra.

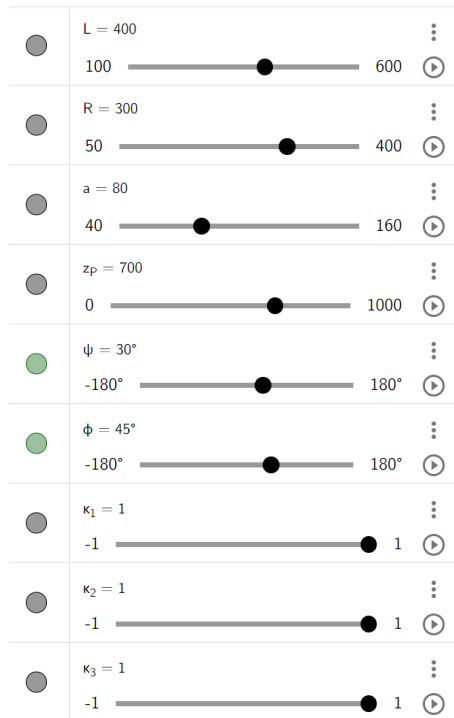
Ada 9 input yang digunakan untuk menentukan jawab permasalahan kinematika invers PRoM-120 ini yang terdiri atas parameter kinematik (L , R , a), variabel *end-effector space* (ψ , ϕ , z), dan indeks cabang κ ($\kappa_1 = \pm 1$, $\kappa_2 = \pm 1$, dan $\kappa_3 = \pm 1$). Kesembilan input ini dinyatakan dengan menggunakan fungsi Slider yang masing-masingnya memiliki nilai awal, nilai akhir, dan *step* (pertambahan nilai). Nilai *default* untuk kesembilan input ini diberikan melalui **Tabel 3**. Sementara itu, representasinya di bagian panel kiri GeoGebra diperlihatkan melalui **Gambar 4**.

Dengan menggunakan *slider* sebagai media interaksi yang ditunjukkan melalui **Gambar 4** maka berbagai variasi input dapat disimulasikan dan divisualisasikan. Dalam arti lain, keinteraktifan penyelesaian secara geometri dapat dieksplorasi untuk berbagai nilai parameter kinematik, *end-effector space*, dan indeks cabang untuk modus rakitan.

Tabel 3.Nilai default input $L, R, a, \psi, \phi, z, \kappa_1, \kappa_2$, dan κ_3 .

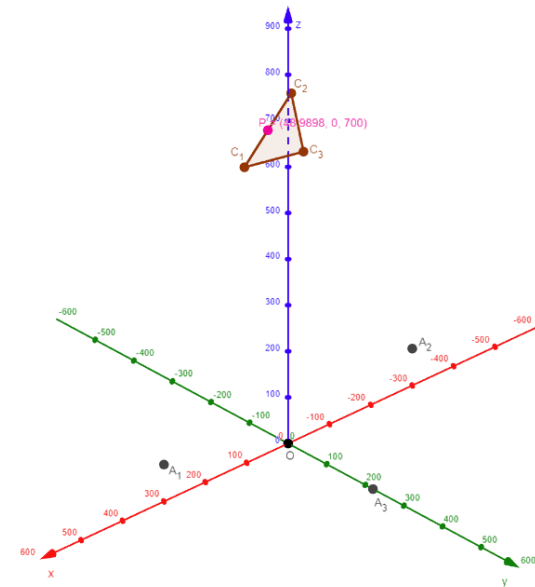
Nama input	Nilai default	Nilai awal	Nilai akhir	Step
L [mm]: L	400	100	600	10
R [mm]: R	300	50	400	10
a [mm]: a	80	40	160	10
z [mm]: z_P	700	0	1000	1
ψ [°]: ψ	30	-180	180	1
ϕ [°]: ϕ	45	-180	180	1
κ_1 : κ_1	1	-1	1	2
κ_2 : κ_2	1	-1	1	2
κ_3 : κ_3	1	-1	1	2

Seperti yang diketahui bahwa, PRoM-120 memiliki gerak parasitik dalam arah sumbu X , persamaan (3). Untuk itu, persamaan (3) dapat diketikkan melalui kotak *command* input berikutnya. Dalam hal ini digunakan variabel $x_P = a \sin(\phi) \cos(\psi)$ dan $y_P = 0$.

**Gambar 4.** Representasi interaktif untuk kesembilan input yang diberikan melalui Tabel 3.

Selanjutnya, proses **P1** dapat dilaksanakan dengan menempatkan kedelapan titik ($O, P, A_1, A_2, A_3, C_1, C_2$, dan C_3) di grafik 3D GeoGebra menggunakan fungsi Point. Misal, untuk titik O dan P digunakan perintah berikut secara berurut $O = \text{Point}(\{0, 0, 0\})$ dan $P = \text{Point}(\{x_P, y_P, z_P\})$. Fungsi ini menggunakan list koordinat masing-masing titik-titik tersebut dalam arah sumbu X, Y , dan Z , dengan mengacu pada vektor posisi yang diberikan oleh persamaan (1) dan Tabel 1. Dengan selesainya proses **P1** ini, posisi kedelapan

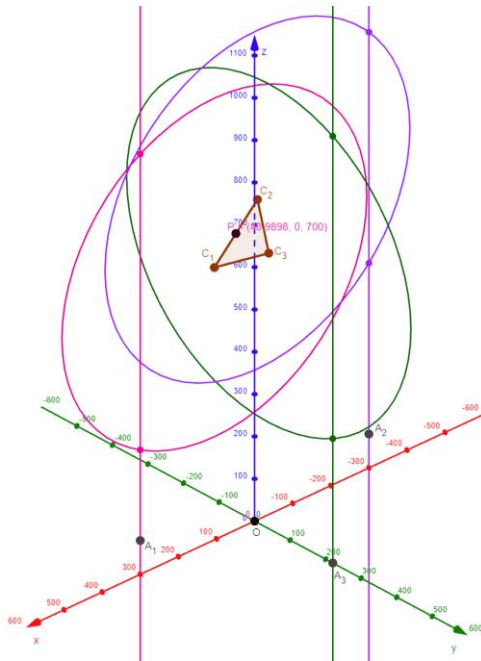
titik yang dimaksud telah berada di grafik 3D GeoGebra seperti yang ditunjukkan melalui **Gambar 5**.

**Gambar 5.** Posisi titik $O, P, A_1, A_2, A_3, C_1, C_2$, dan C_3 pada grafik 3D GeoGebra.

Proses berikutnya (**P2**) ditujukan untuk mengkonstruksi 3 garis yang masing-masingnya sejajar dengan sumbu Z dan melalui titik A_1, A_2 , dan A_3 . Sebagai contoh untuk membuat garis yang melalui titik A_1 digunakan variabel dan fungsi $\text{PrismaticPath}_1 = \text{Line}(A_1, z\text{Axis})$, $z\text{Axis}$ merupakan identifikasi untuk sumbu Z di GeoGebra. Selanjutnya, proses **P3** dapat dikerjakan untuk membuat 3 buah lingkaran yang berpusat di C_1, C_2 , dan C_3 seperti yang telah dideskripsikan sebelumnya. Untuk lingkaran dengan pusat C_1 dan radius L yang berada dalam bidang XZ dapat dinyatakan ke dalam variabel dan fungsi yaitu $\text{circleLimb}_1 = \text{Circle}(C_1, L, y\text{Axis})$. Parameter $y\text{Axis}$ pada perintah Circle menunjukkan sumbu lingkaran tersebut tegak lurus dengan bidang XZ . Tahapan **P2** dan **P3** ini diilustrasikan pada **Gambar 6**.

Mengacu pada **Gambar 6** diperlihatkan garis dan lingkaran dengan warna yang sama. Penggunaan warna yang sama, misal antara garis PrismaticPath_1 dan circleLimb_1 , menunjukkan keduanya objek geometri berada pada *limb* yang sama, yaitu *limb* pertama. Dengan mengambil contoh untuk *limb* pertama dapat ditentukan dengan jelas titik potong garis dan lingkaran yang dimaksud. Titik potong ini diperoleh melalui penerapan variabel dan fungsi berikut ini, yaitu $\text{intersectOnLimb}_1 = \{\text{Intersect}(\text{PrismaticPath}_1, \text{circleLimb}_1)\}$. Hasil dari penerapan perintah ini diberikan secara langsung pada grafik 3D GeoGebra untuk warna titik-titik yang sama dengan garis dan lingkaran sebelumnya. Dengan

demikian, **P4** telah selesai dilakukan untuk ketiga *limb* seperti yang ditampilkan oleh **Gambar 6**.



Gambar 6. Proses **P2**, **P3**, dan **P4** sesuai dengan alur pada **Gambar 2**.

Pada proses **P6**, tiga buah vektor antara dua titik yaitu $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, dan $\overrightarrow{A_3B_3}$ dikonstruksi dengan menggunakan fungsi Vector. Untuk itu, pada *limb* pertama digunakan variabel dan fungsi $\text{Actuator}_1 = \text{Vector}(A_1, B_1)$, sedangkan untuk dua *limb* lainnya dilakukan dengan cara mengganti subskrip 1 dengan 2 dan 3. Selanjutnya, hasil yang diperoleh pada **P2**, **P3**, dan **P4** disembunyikan untuk mempertegas visualisasi jawab kinematik invers dalam modus rakitan PRoM-120.

Besar perpindahan sambungan prismatic (titik B_i) terhadap titik A_i dapat ditentukan dengan mengekstrak komponen Z variabel Actuator_1 , Actuator_2 , dan Actuator_3 . Sebagai contoh, untuk aktuator pertama digunakan perintah $d_1 = z(\text{Actuator}_1)$. Dengan demikian, tahapan output ini akan menghasilkan nilai setiap *actuator space* (d_1 , d_2 , d_3) yang merupakan jawab kinematika invers PRoM-120.

Kedua cara penyelesaian kinematika invers ini memberikan jawab yang sama untuk seluruh modus rakitan berdasarkan nilai *default* parameter kinematik dan *end-effector* pada **Tabel 3**. Jawab kinematika invers untuk kedua cara penyelesaian ini ditampilkan melalui **Tabel 4**. Jawab kinematika invers yang diberikan melalui **Tabel 4** juga dapat divisualisasikan dalam **Gambar 7**.

Selanjutnya, *output* metode geometri interaktif memberikan jawab kinematika invers

yang setara tanpa harus menentukan jawab tertutup, persamaan (7), dan mengevaluasinya. Pernyataan ini juga sama dengan yang dinyatakan melalui kajian oleh [12] untuk manipulator paralel Delta. Namun, penggunaan metode geometri interaktif ini juga memiliki kekurangan ketika tidak adanya titik-titik potong yang diperoleh pada akhir **P4**.

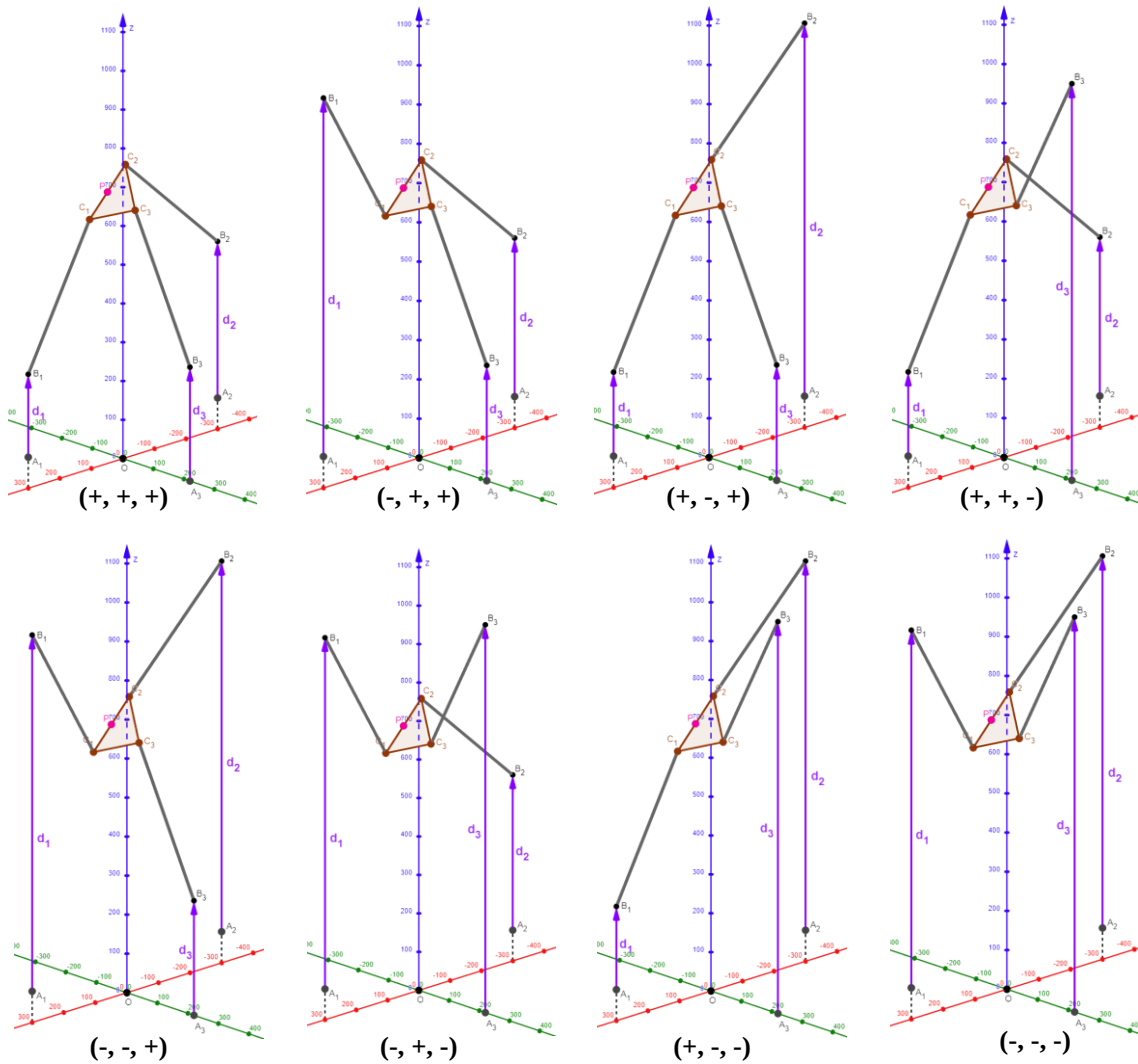
Tabel 4.

Jawab kinematika invers untuk kedua cara penyelesaian dengan nilai *default* L , R , a , ψ , ϕ , dan z pada **Tabel 3**.

Modus rakitan	d_1 [mm]	d_2 [mm]	d_3 [mm]
(+, +, +)	213.8711	403.6403	293.7988
(-, +, +)	912.9918	403.6403	293.7988
(+, -, +)	213.8711	949.4968	293.7988
(+, +, -)	213.8711	403.6403	1008.2216
(-, -, +)	912.9918	949.4968	293.7988
(-, +, -)	912.9918	403.6403	1008.2216
(+, -, -)	213.8711	949.4968	1008.2216
(-, -, -)	912.9918	949.4968	1008.2216

4. Kesimpulan

Permasalahan kinematika invers PRoM-120 telah diselesaikan secara aljabar dan geometri interaktif. Penyelesaian secara aljabar menghasilkan jawab tertutup kinematika invers yang menunjukkan relasi matematis *actuator space* (d_1 , d_2 , d_3) untuk *end-effector space* (ψ , ϕ , z) yang diketahui. Sementara itu, penyelesaian secara geometri interaktif tidak memberikan jawab tertutup selayaknya penyelesaian secara aljabar. Jawab kinematika invers merupakan titik potong geometri garis (yang merupakan garis lurus lintasan sambungan prismatic) dan lingkaran yang berpusat pada titik sambungan di *platform*. Melalui metode geometri interaktif ini dapat diperoleh jawab dan visualisasi kinematika invers secara bersamaan. Kajian kedepannya dilakukan untuk memperoleh jawab permasalahan kinematika langsung PRoM-120.



Gambar 7. Visualisasi jawab kinematika invers untuk kedelapan modus rakitan dengan nilai numerik *actuator space* (d_1, d_2, d_3) diberikan melalui Tabel 4.

Daftar Pustaka

- [1] Meng Q, Xie F, Liu X. Conceptual design and kinematic analysis of a novel parallel robot for high-speed pick-and-place operations. *Front Mech Eng* 2018; 13: 211–224.
- [2] Herrero S, Pinto C, Altuzarra O, et al. Analysis of the 2PRU-1PRS 3DOF parallel manipulator: kinematics, singularities and dynamics. *Robot Comput Integr Manuf* 2018; 51: 63–72.
- [3] Li B, Chen Y, Deng Z, et al. Conceptual design and analysis of the 2T1R mechanism for a cooking robot. *Rob Auton Syst* 2011; 59: 74–83.
- [4] Liu W, Liu H. Synthesis of asymmetric parallel mechanism with multiple 3-DOF motion modes. *Adv Mech Eng* 2022;14:1–18.
- [5] Nigatu H, Kim D. Workspace optimization of 1T2R parallel manipulators with a dimensionally homogeneous constraint-embedded Jacobian. *Mech Mach Theory* 2023; 188: 1–27.
- [6] Li Q, Chen Z, Chen Q, et al. Parasitic motion comparison of 3-PRS parallel mechanism with different limb arrangements. *Robot Comput Integr Manuf* 2011; 27: 389–396.
- [7] Schadlbauer J, Walter DR, Husty ML. The 3-RPS parallel manipulator from an algebraic viewpoint. *Mech Mach Theory* 2014; 75: 161–176.
- [8] Xinxue C, Xiangyi L, Chenxin T, et al.

- Inverse Kinematics Analysis Method of Parallel Robot Based on Conformal Geometry Algebra. *Trans Chinese Soc Agric Mach* 2024; 55: 421–430.
- [9] International GeoGebra Institute. GeoGebra Classic 6.
- [10] Ziatdinov R, Valles JR. Synthesis of Modeling, Visualization, and Programming in GeoGebra as an Effective Approach for Teaching and Learning STEM Topics. *Mathematics* 2022; 10: 1–16.
- [11] Di Gregorio R, Cinti T. Geometric Constraint Programming (GCP) Implemented Through GeoGebra to Study/Design Planar Linkages. *Machines*; 12. Epub ahead of print 2024. DOI: 10.3390/machines12110825.
- [12] Akhilraj Chamakkalayil-Anilkumar, Brinster L. Simulation eines parallelen Roboters mit GeoGebra und ROS. In: 12. SAXSIM - Saxon Simulation Meeting, Chemnitz. Technische Universität Chemnitz, 2023. Epub ahead of print 2023. DOI: 10.51382/978-3-96100-112-5_v19.
- [13] Adriyan A, Sufiyanto S. Kinematic and Singularity Analysis of PRoM-120 “A Parallel Robotic Manipulator with 2-PRU/PRS Kinematic Chains. *J Rekayasa Mesin* 2018; 9: 201–209.
- [14] Adriyan, Sufiyanto. The determination of workspace and the performance evaluation of PRoM-120 with 3 and 4 kinematic constants. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019, p. 012064.
- [15] Harris CR, Millman KJ, van der Walt SJ, et al. Array programming with NumPy. *Nature* 2020; 585: 357–362.