

# Implementasi HarmonicBalance.jl untuk Menentukan Performansi Isolator Getaran Nonlinear *Quasi-Zero Stiffness*

Adriyan

Program Studi Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Riau

Jl. Tuanku Tambusai, Delima, Pekanbaru, 28294

E-mail: [adriyan@umri.ac.id](mailto:adriyan@umri.ac.id)\*

## Abstract

Vibration isolation is a vibration control technique that reduces the transmission of vibrations from a source to an isolated object. The objective of this study was to determine the performance of a nonlinear isolator with nonlinear restoring forces and damping forces under variations in nonlinear damping and the excitation amplitude. Then, the isolator was subjected to a harmonic excitation to obtain its steady-state solution in the frequency domain using the harmonic balance (HB) method. The application of the HB method produced an isolator transmissibility curve, which is a metric to assess its performance. The HB method was applied by using a Julia package called HarmonicBalance.jl. The simulation showed that the nonlinear damping significantly reduce the isolator transmissibility, particularly at the high excitation amplitudes.

**Keywords:** nonlinear isolator, quasi-zero stiffness, harmonic balance method, transmissibility.

## Abstrak

Isolasi getaran merupakan sebuah teknik pengendalian getaran untuk mereduksi transmisi getaran dari sumber gangguan ke objek yang diisolasi. Kajian ini menyajikan penentuan performa suatu isolator nonlinier pada komponen gaya pemulih dan gaya peredamannya berdasarkan variasi redaman nonlinier dan amplitudo eksitasi. Selanjutnya, eksitasi harmonik dikenakan ke isolator dan jawab steady-state dalam ranah frekuensi ditentukan melalui penerapan metode harmonic balance (HB). Berdasarkan penerapan metode ini diperoleh transmissibilitas isolator yang digunakan sebagai metrik untuk menentukan performanya. Metode HB ini digunakan melalui implementasi paket program Julia yang bernama HarmonicBalance.jl. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan diketahui bahwa redaman nonlinier memberikan dampak yang signifikan bagi isolator untuk mereduksi transmissibilitas terutama ketika amplitudo eksitasi besar.

**Kata kunci:** isolator nonlinier, quasi-zero stiffness, metode harmonic balance, transmissibilitas.

## 1. Pendahuluan

Getaran yang berlebih memberikan efek penurunan performansi pada perangkat untuk instrumentasi kepresisian tinggi, kendaraan darat, ataupun pesawat terbang [1]. Untuk itu, usaha pereduksiannya hingga berada di bawah ambang batas diperlukan yang salah satu usaha ini dapat diperoleh melalui teknik isolasi getaran. Tujuan utama pengisolasian getaran adalah mengurangi transmisi gaya dari sumber getaran ke sistem yang akan diisolasi.

Kajian riset terbaru memperlihatkan bahwa penerapan isolator nonlinier dapat mengatasi kekurangan isolator linier. Kekurangan ini dalam hal lebar frekuensi pengisolasian dengan tetap mampu menahan beban statik yang besar [2]. Berbagai sistem mekanik telah diajukan untuk

menghasilkan isolator nonlinier ini terutama yang memiliki karakteristik *quasi-zero stiffness* [3–5]. Karakteristik QZS dimanfaatkan sebagai kemampuan menahan beban yang besar yang dapat diatur untuk posisi seimbang statik. Ketika eksitasi diberikan maka dengan kekakuan yang dapat menghasilkan frekuensi pengisolasian yang rendah pula.

Sistem mekanik dengan karakteristik QZS yang pertama kali disusun oleh dua buah pegas miring dan satu pegas vertikal oleh Carella [6]. Pada kondisi keseimbangan statik, pegas miring akan diset dalam kondisi horizontal yang menunjukkan kapasitas maksimum menahan massa yang diisolasi [7]. Dalam aplikasinya, sistem mekanik ini dapat menghasilkan rasio frekuensi pengisolasian  $> 0.7$  kali frekuensi pengisolasian linier [8]. Hal ini menunjukkan

bahwa isolator nonlinier memiliki kemampuan yang baik dalam pengisolasian getaran.

Selanjutnya, peningkatan performa pengisolasian dikaji lebih lanjut yang memfokuskan pada: (1) pengajuan konfigurasi sistem mekanik lainnya, lihat referensi [1,3,4], (2) menambahkan redaman nonlinier selayaknya kekakuan nonlinier pada sistem QZS [9], dan/atau (3) menambahkan massa tambahan untuk menurunkan frekuensi pengisolasian [10,11].

Di samping itu, kajian terkait penentuan performansi isolator nonlinier ini dilakukan dengan menggunakan metrik transmisibilitas. Transmisibilitas mengukur besarnya getaran yang ditransmisikan dari sumber getaran ke bagian yang akan diisolasi. Penentuan transmisibilitas umumnya menggunakan eksitasi harmonik baik yang diaplikasikan pada tumpuan atau di massa. Untuk itu, metode penyelesaiannya umumnya berada dalam ranah frekuensi menggunakan metode *harmonic balance* (HB).

Sejak diperkenalkan oleh Blondel di tahun 1919, metode HB ini memiliki perkembangan yang signifikan dalam kurun waktu 100 tahun terakhir [12]. Perkembangan ini ditandai dengan berbagai varian metode HB yang diajukan untuk dapat mendapatkan jawab *steady-state* untuk getaran nonlinier akibat eksitasi harmonik. Metode HB yang orisinal merupakan teknik pendekatan jawab harmonik nonlinier atas beberapa suku koefisien Fourier secara analitis matematis. Suku-suku koefisien ini berhubungan langsung dengan  $\cos(n\Omega t)$  dan  $\sin(n\Omega t)$ . Nilai  $n$  merupakan jumlah suku yang dilibatkan, jika  $n$  bernilai 1 atau  $n > 1$  masing-masingnya disebut dengan harmonik primer, subharmonik  $n$ .

Di samping teknik analitis matematis ini, metode HB juga dikembangkan secara numerik seperti metode *incremental HB* (IHB), *enhanced IHB* (EIHB), *elliptic HB* (EHB), dan *alternating frequency-time domain HB* (AFT-HB). Metode-metode ini telah diimplementasikan untuk analisis getaran isolator nonlinier seperti yang dinyatakan dalam [13–15].

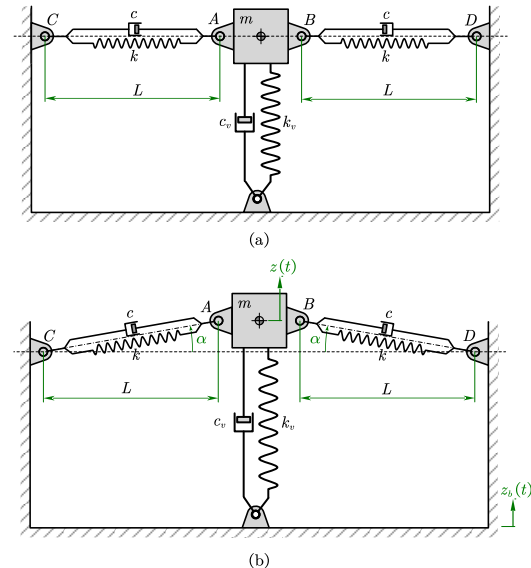
Meskipun demikian, terdapat keterbatasan pustaka atau paket program berjenis lisensi kode terbuka yang dapat dimanfaatkan dalam analisis performansi isolator getaran nonlinier. Setidaknya terdapat tiga pustaka atau paket program lisensi kode terbuka, yaitu *NLVib* untuk Matlab® [16], *HarmonicBalance.jl* untuk Julia [17], dan *PyHBM* untuk Python [18]. *NLVib* dan *PyHBM* mengimplementasikan tahapan nonsimbolik matematis dalam penyelesaiannya. Sementara itu, *HarmonicBalance.jl* menerapkan metode analitis matematis dan metode numerik *homotopy continuation* untuk mendapatkan transmisibilitas.

Penelitian yang disajikan dalam manuskrip ini memberikan kajian untuk menentukan performansi isolator nonlinier akibat variasi redaman nonlinier dan amplitudo eksitasi. Isolator nonlinier ini dikonstruksi oleh sepasang komponen horizontal pegas-peredam dan satu komponen vertikal pegas-peredam. Komponen horizontal pegas-peredam ini menyediakan karakteristik nonlinier untuk gaya pemulih dan gaya peredaman. Analisis performansi isolator ini dilakukan dengan menggunakan metode HB menggunakan paket program Julia *HarmonicBalance.jl*.

## 2. Metodologi

### 2.1. Persamaan gerak

Isolator nonlinier disusun atas dua set pegas dan peredam linier yang dipasang secara mendatar atau horizontal, satu set pegas dan peredam linier yang dipasang vertikal ( $k_v$  dan  $c_v$ ), dan satu buah massa  $m$  yang diisolasi. Setiap set pegas dan peredam linier yang diinstalasi mendatar memiliki kekakuan  $k$  dan koefisien redaman  $c$ . Kondisi ini merupakan keadaan keseimbangan statik sistem mekanik isolator ini seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 1(a).



**Gambar 1.** Isolator getaran nonlinier pada kondisi (a) seimbang statik dan (b) dinamik ketika dikenakan eksitasi pada tumpuan.

Selanjutnya, Gambar 1(b) memperlihatkan kondisi ketika isolator dikenakan eksitasi secara vertikal pada tumpuan. Akibat eksitasi pada tumpuan ini, massa yang diisolasi bergerak dalam arah vertikal yang diikuti dengan kedua set pegas

peredam membentuk sudut sebesar  $\alpha$  terhadap horizontal.

Pada kondisi dinamik ini, massa yang diisolasi mengalami perubahan gerak sebesar  $z(t)$  dari posisi seimbang statiknya. Akibatnya, pegas  $k$  memiliki pertambahan panjang sebesar

$$s = \sqrt{L^2 + (z - z_b)^2} - L. \quad (1)$$

Sementara itu, peredam  $c$  akan memiliki perubahan panjang persatuan waktu sebesar

$$\dot{s} = \frac{(z - z_b)}{\sqrt{L^2 + (z - z_b)^2}} (\dot{z} - \dot{z}_b). \quad (2)$$

Untuk menyederhanakan persamaan (1) dan (2) digunakan koordinat relatif  $z_r = z - z_b$ .

Berdasarkan hubungan yang diberikan pada persamaan (1) dan (2) dapat ditentukan energi kinetik  $\mathcal{T}$ , energi potensial  $\mathcal{V}$ , dan fungsi disipasi Rayleigh  $\mathcal{D}$  untuk isolator getaran ini, yaitu

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m \dot{z}^2, \quad (3)$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} k_v (z - z_b)^2 + 2 \left( \frac{1}{2} k s^2 \right), \quad (4)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} c_v (\dot{z} - \dot{z}_b)^2 + 2 \left( \frac{1}{2} c \dot{s}^2 \right), \quad (5)$$

Persamaan diferensial gerak dikonstruksi dengan menggunakan persamaan Lagrange [] yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{z}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z_r} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z_r} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{z}_r} = 0. \quad (6)$$

Penerapan persamaan (3)–(5) ke dalam persamaan (6) menghasilkan persamaan gerak isolator

$$m \ddot{z}_r + c_v \dot{z}_r + 2c \frac{z_r^2}{L^2 + z_r^2} \dot{z}_r + k_v z_r + 2kz_r \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + z_r^2}} \right) = -m \ddot{z}_b. \quad (7)$$

Berdasarkan persamaan (7) dapat dinyatakan dua parameter non-dimensional. Parameter pertama merupakan rasio kekakuan pegas  $k$  terhadap pegas vertikal  $k_v$  yang dinyatakan dengan  $\kappa$ . Sedangkan parameter kedua menyatakan rasio koefisien redaman peredam  $c$  terhadap koefisien redaman peredam vertikal  $c_v$  yang disebut dengan

$\chi$ . Dengan demikian, persamaan (7) dapat ditulis ulang dalam bentuk

$$m \ddot{z}_r + c_v \left( 1 + 2\chi \frac{z_r^2}{L^2 + z_r^2} \right) \dot{z}_r + k_v \left[ 1 + 2\kappa \left( 1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + z_r^2}} \right) \right] z_r = -m \ddot{z}_b. \quad (8)$$

Selanjutnya, dua buah besaran lainnya diperkenalkan yaitu  $\omega_0 = \sqrt{k_v/m}$  dan  $\zeta_0 = c/(2m\omega_0)$ . Variabel non-dimensional perpindahan relatif dan perpindahan tumpuan dinyatakan sebagai rasio perpindahannya masing-masing terhadap panjang awal pegas  $L$ , yaitu  $\bar{z}_r = z_r/L$  dan  $\bar{z}_b = z_b/L$ . Kemudian, variabel kecepatan dan percepatan non-dimensional dapat ditentukan dengan mengubah variabel independen waktu menjadi tak berdimensi juga melalui hubungan  $\bar{t} = \omega_0 t$ . Dengan demikian, variabel kecepatan dan percepatan non-dimensional dapat ditulis masing-masingnya sebagai  $\dot{z}_r = \omega_0 L \bar{z}'_r$  dan  $\ddot{z}_r = \omega_0^2 L \bar{z}''_r$  serta  $\dot{z}_b = \omega_0^2 L \bar{z}''_b$ . Akhirnya, persamaan diferensial gerak dalam bentuk non-dimensional dapat ditulis sebagai

$$\bar{z}''_r + 2\zeta_0 \left( 1 + 2\chi \frac{\bar{z}_r^2}{1 + \bar{z}_r^2} \right) \bar{z}'_r + \left[ 1 + 2\kappa \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{z}_r^2}} \right) \right] \bar{z}_r = -\bar{z}''_b. \quad (9)$$

## 2.2. Eksitasi pada tumpuan

Eksitasi pada tumpuan dalam kajian ini menggunakan eksitasi harmonik yang dinyatakan secara matematis oleh hubungan

$$z_b = Z_0 \cos(\Omega t), \quad (10)$$

dengan  $Z_0$  dan  $\Omega$  masing-masingnya menyatakan amplitudo simpangan dan frekuensi eksitasi. Bentuk non-dimensional persamaan (10) ini dinyatakan oleh

$$\bar{z}_b = \bar{Z}_b \cos(\bar{\Omega} \bar{t}), \quad (11)$$

dengan  $\bar{Z}_b = Z_b/L$  dan  $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$ . Dengan demikian, ruas kanan persamaan (9) dapat ditulis sebagai

$$-\bar{z}''_b = \bar{\Omega}^2 \bar{Z}_b \cos(\bar{\Omega} \bar{t}). \quad (12)$$

Untuk eksitasi harmonik, penyelesaian persamaan (9) secara umum menerapkan jawab *steady state*. Penyelesaian *steady state* dapat diperoleh secara langsung dengan menggunakan *harmonic balance* (HB). Metode HB merupakan metode aproksimasi dalam menentukan jawab periodik atau *steady state* suatu persamaan diferensial biasa. Melalui jawab ini dapat diperoleh performansi isolator yang ditentukan berdasarkan transmisibilitas perpindahannya  $T_d$ . Transmisibilitas perpindahan merupakan rasio perpindahan massa isolasi  $z$  terhadap perpindahan tumpuan  $z_b$ , atau  $T_d = Z/Z_b$ .

### 2.3. Implementasi HarmonicBalance.jl

HarmonicBalance.jl [17] merupakan paket (*package*) dalam bahasa pemrograman Julia [19] untuk menentukan jawab *steady state* persamaan diferensial biasa nonlinier. Paket HarmonicBalance.jl ini dikembangkan dengan menggunakan paket Julia lainnya yaitu Symbolics.jl [20] untuk komputasi simbolik dan HomotopyContinuation.jl [21] untuk penyelesaian sistem polinom. Untuk lebih jelasnya, *workflow* (alur kerja) dari paket HarmonicBalance.jl ditampilkan melalui Gambar 2.

Berdasarkan *workflownya* terlihat bahwa persamaan diferensial dirubah menjadi persamaan harmonik melalui suku-suku Fourier dengan memperkerjakan paket program simbolik (Symbolics.jl). Hal ini menunjukkan bahwa persamaan diferensial nonlinear yang komponen nonlinearnya bukan dalam bentuk polinomial tidak dapat dikonversi langsung oleh paket HarmonicBalance.jl ini. Oleh karena itu, komponen nonlinear dalam persamaan diferensial

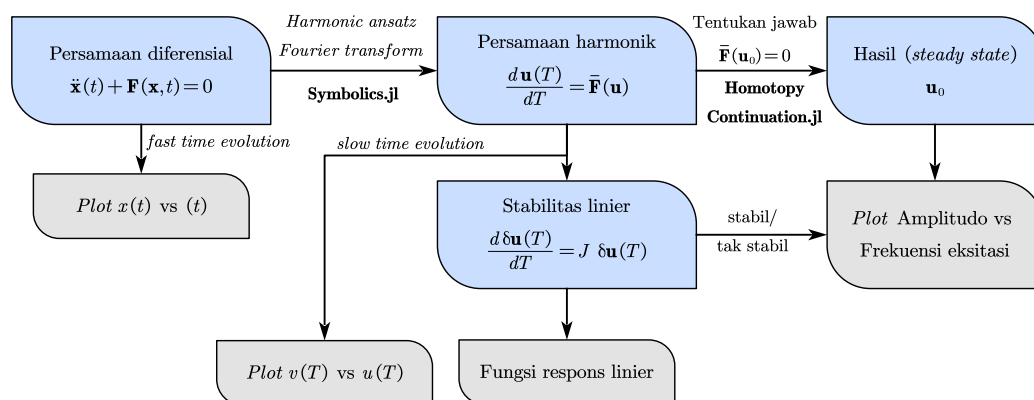
perlu dirubah ke dalam bentuk polinomial terlebih dahulu dengan menerapkan ekspansi deret Taylor untuk derajat polinom tertentu,  $n$ . Untuk mengakomodir ekspansi deret Taylor ini dapat digunakan fungsi `taylor()` yang telah disediakan oleh paket Symbolic.jl.

Selanjutnya, fungsi DifferentialEquations digunakan untuk membentuk persamaan diferensial gerak yang akan diselesaikan. Persamaan diferensial gerak ini merupakan persamaan diferensial aproksimasi dalam bentuk polinomial dengan derajat  $n$ . Untuk kajian ini digunakan harmonik utama saja melalui penerapan fungsi `add_harmonic!()`. Dengan demikian, persamaan harmoniknya dengan mudah diekstraksi melalui penggunaan fungsi `get_harmonic_equations()`.

Tahapan berikutnya merupakan tahapan penentuan jawab dengan metode HB ini melalui penertaan parameter-parameter yang bernilai tetap dan sebuah variabel. Variabel yang dimaksud adalah frekuensi eksitasi yang dinyatakan dalam bentuk nondimensional  $\Omega$ . Penentuan jawab ini dilakukan dengan memanggil fungsi `get_steady_states()`.

Untuk dapat memahami hasilnya disediakan beberapa fitur visualisasi berupa:

- hubungan amplitudo *steady state* dengan frekuensi eksitasi melalui fungsi `plot_1D_solutions()`,
- bagian riil dan imajiner nilai eigen matriks Jacobian dengan memanfaatkan fungsi `plot_1D_jacobian_eigenvalues()`, dan
- hubungan fasa *steady state* dengan frekuensi eksitasi dengan menggunakan fungsi `plot_2D_phase_diagram()`.



Gambar 2. Workflow HarmonicBalance.jl [17].

## 2.4. Simulasi performansi isolator

Performansi isolator ditentukan untuk berbagai variasi parameter tertentu yang dimiliki oleh isolator ini. Parameter yang dimaksud adalah  $\zeta_0$ ,  $\chi$ , dan  $\bar{Z}_b$ . Sementara itu, faktor  $\kappa$  diset konstan selama proses simulasi, yaitu sebesar 10. Variasi parameter yang dimaksud dinyatakan melalui Tabel 1. Untuk visualisasi transmisiabilitas dan frekuensi eksitasi digunakan  $\bar{\Omega}$  dari 0 s/d 6 dengan penambahan 0.001.

**Tabel 1.**  
Variasi parameter isolator getaran nonlinier.

Parameter	Variasi
$\zeta_0$	0.05, 0.1, 0.25, dan 0.5
$\chi$	0. dan 10.0
$\bar{Z}_b$	0.05, 0.1, 0.25, dan 0.5

## 2.5. Perangkat lunak dan keras

Perangkat lunak yang digunakan dalam kajian ini diantaranya yaitu Julia v1.10.10, HarmonicBalance v0.15.5, CairoMakie v0.13.10, Plots v.1.41.1, dan Symbolics v6.57.0. Kode program ditulis dan dieksekusi menggunakan aplikasi *integrated development environment* (IDE) VSCode dengan menggunakan ekstensi Julia dari julialang. Sementara itu, proses komputasi berjalan pada perangkat keras Intel i7-11800H dengan clock maksimum 4.60 GHz dan RAM 32 GB.

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. Persamaan Gerak Pendekatan

Persamaan gerak yang dinyatakan dalam persamaan (9) diaproksimasi dengan penerapan ekspansi deret Taylor disekitar keseimbangan statik ( $z_r = 0$ ). Untuk itu, aproksimasi dilakukan untuk menghasilkan polinomial berderajat 3. Dengan demikian, persamaan gerak dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} \ddot{z}_r'' + 2\zeta_0(1 + 2\chi\bar{z}_r^2)\dot{z}_r' \\ + (1 + \kappa\bar{z}_r^2)z_r = \bar{\Omega}^2\bar{Z}_b\cos(\bar{\Omega}\bar{t}). \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.2. Penerapan HarmonicBalance.jl

Penerapan paket HarmonicBalance.jl dan paket lainnya untuk penentuan transmisiabilitas isolator nonlinear dilakukan dengan meninstantiasinya terlebih dahulu menggunakan *keyword using*. Selanjutnya, variabel dan parameter yang dinyatakan dalam persamaan (13)

diinstantiasiasi dengan menggunakan *macro @variables*. Variabel dan parameter yang dimaksud dinyatakan melalui Tabel 2.

Langkah berikutnya membuat sebuah variabel dengan nama `vi_eom_approx` yang dihasilkan dari penerapan fungsi `DifferentialEquations` untuk membuat persamaan diferensial berdasarkan persamaan (13). Kemudian jawaban dari persamaan diferensial ini untuk kondisi *steady state* didekati dengan *harmonic ansatz*, yaitu

$$\bar{z}_r = u_1(T)\cos(\bar{\Omega}\bar{t}) + v_1(T)\sin(\bar{\Omega}\bar{t}). \quad (14)$$

**Tabel 2.**  
Variabel dan parameter pada persamaan (13) yang diinstantiasiasi dalam variabel simbolik di bahasa pemrograman Julia.

Variabel dan Parameter	Nama variabel simbolik di Julia
$\bar{t}$	t
$\bar{z}_r$	$\hat{z}_r(t)$
$\zeta_0$	$\zeta_0$
$\chi$	$\chi$
$\kappa$	$\kappa$
$\bar{Z}_b$	$\hat{Z}_b$
$\bar{\Omega}$	$\Omega$

Untuk membuat jawab pendekatan ini fungsi `add_harmonic!` digunakan pada variabel `vi_eom_approx`. Selanjutnya persamaan harmonik untuk harmonik dominannya dapat diperoleh dengan menggunakan fungsi `get_harmonic_equations(vi_eom_approx)` yang dinyatakan ke dalam variabel `harmonic_eq`. Selanjutnya, setiap kombinasi variasi parameter yang dinyatakan dalam Tabel 1 dinyatakan ke dalam variabel `params`. Serta variabel `var` merupakan rasio frekuensi eksitasi. Jawab *steady state* dalam ranah frekuensi diperoleh melalui fungsi `get_steady_states(harmonic_eq, vars, params)` dan dinyatakan ke dalam variabel `ss_sol`.

Variabel `ss_sol` ini merupakan jawab yang diperoleh melalui penyelesaian polinomial dengan metode *homotopy continuation*. Penyelesaian ini memberikan berupa jumlah cabang jawab yang dikategorikan sebagai jumlah jawab ril dan jumlah jawab stabilnya. Setelah itu, jawab pada variabel `ss_sol` ini diekstraksi menggunakan fungsi `get_solutions` yang merupakan amplitudo dan juga fasa dari jawab harmonik pada persamaan (14). Amplitudo dan fasa ini dapat ditentukan dengan merubah representasi persamaan (14) ke dalam bentuk

$$\bar{z}_r = \bar{Z}_r \cos(\bar{\Omega} \bar{t} - \varphi), \quad (15)$$

dengan amplitudo perpindahan relatif sebesar

$$\bar{Z}_r = \sqrt{(u_1(T))^2 + (v_1(T))^2}, \quad (16)$$

dan fasa sebesar

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{v_1(T)}{u_1(T)} \right). \quad (17)$$

Selanjutnya, transmisibilitas perpindahan untuk massa yang diisolasi ditentukan dengan menggunakan hubungan berikut ini, yaitu

$$T_d = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}_b} = \sqrt{1 + \left( \frac{\bar{Z}_r}{\bar{Z}_b} \right)^2 + 2 \frac{\bar{Z}_r}{\bar{Z}_b} \cos(\varphi)}, \quad (18)$$

dengan  $\cos(\varphi) = u_1(T)/\bar{Z}_r$ . Dengan menggunakan paket CairoMakie.jl dapat divisualisasikan transmisibilitas perpindahan massa yang diisolasi. Proses ini diulangi untuk seluruh kombinasi variasi parameter yang dinyatakan pada Tabel 2.

Langkah-langkah ini disajikan secara sederhana melalui potongan kode yang dinyatakan dalam Gambar 3. Melalui Gambar 3 ini hanya ditunjukkan kode untuk satu kombinasi variasi parameter, yaitu  $\zeta_0 = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\kappa = 10.0$ , dan  $\bar{Z}_b = 0.25$ . Untuk nilai nominal yang diberikan ( $\zeta_0 = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\kappa = 10.0$ , dan  $\bar{Z}_b = 0.25$ ), potongan kode pada Gambar 3 menghasilkan visualisasi transmisibilitas perpindahan.

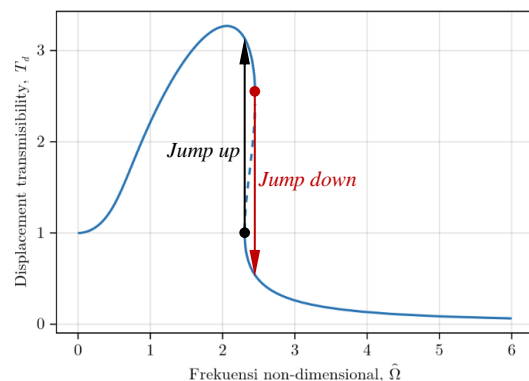
Transmisibilitas perpindahan ini ditunjukkan dalam Gambar 4. Bagian transmisibilitas yang ditunjukkan dengan garis-putus-putus merupakan jawab *steady state* yang tidak stabil (*unstable*). Bagian jawab tak stabil ini merupakan fenomena yang dikenal dengan istilah lompatan naik (*jump up*) dan lompatan turun (*jump down*). Fenomena ini muncul pada sisten nonlinier ketika sapuan frekuensi eksitasi masing-masingnya dari nilai tertinggi ke terkecil dan sebaliknya.

```

1 # Load packages
2 using HarmonicBalance
3 using Symbolics
4 using CairoMakie
5 using Makie
6 using Plots
7
8 # Variabel-variabel symbolic
9 @variables ζ₀, χ, κ, Z̄b, Ω, t, Z̄r(t)
10 # Persamaan gerak pendekatan -> persamaan (13)
11 vi_eom_approx = DifferentialEquation(
12   d(d(Z̄r, t), t)
13   + 2ζ₀ * (1 + 2χ * (Z̄r^2)) * d(Z̄r, t)
14   + (1 + 2κ * ((1 / 2) * Z̄r^2)) * Z̄r
15   ~ Ω^2 * Z̄b * cos(Ω * t),
16   Z̄r)
17 # Harmonik primer sebagai harmonik dominan
18 add_harmonic!(vi_eom_approx, Z̄r, Ω)
19 # Harmonic balance
20 harmonic_eq = get_harmonic_equations(vi_eom_approx)
21
22 # Parameter nominal (diambil salah satu pada Tabel 2)
23 params = (ζ₀ => 0.1, χ => 10., κ => 10., Z̄b => 0.25)
24 # Frekuensi pribadi nondimensional
25 vars = Ω => LinRange(0., 6., 6001)
26
27 # Jawab steady state
28 ss_sol = get_steady_states(harmonic_eq, vars, params)
29 # Ekstraksi jawab dari ss_sol
30 Zb = Dict(params)[Z̄b]
31 Z̄r = stack(real.(get_solutions(
32   ss_sol, "sqrt(u1^2 + v1^2)",
33   class=["physical", "stable"])))
34 Z̄ru = stack(real.(get_solutions(
35   ss_sol, "sqrt(u1^2 + v1^2)",
36   class="physical", not_class="stable")))
37 u1 = stack(real.(get_solutions(
38   ss_sol, "u1", class=["physical", "stable"])))
39 u1u = stack(real.(get_solutions(
40   ss_sol, "u1", class="physical", not_class="stable")))
41 # Transmisibilitas perpindahan relatif
42 Trd = Z̄r ./ Zb
43 Trdu = Z̄ru ./ Zb
44 # Transmisibilitas perpindahan -> persamaan (18)
45 Td = sqrt.(1 .+ Trd.^2 .+ 2 .* u1 ./ Zb)
46 Tdu = sqrt.(1 .+ Trdu.^2 .+ 2 .* u1u ./ Zb)
47
48 # Plot transmisibilitas perpindahan
49 inch = 160
50 lw = 2
51 color = Makie.wong_colors()
52 xlabel = L"Frekuensi non-dimensional, Ω"
53 ylabel = L"Displacement transmissibility, T_d"
54 with_theme(theme_latexfonts()) do
55   fig = Figure(size=(3inch, 2.2inch))
56   axT = Axis(fig[1, 1], xlabel=xlabel, ylabel=ylabel)
57   for i in 1:size(Td)[1]
58     lines!(axT, Dict(vars)[0], Td[i, 1:end], linewidth=lw,
59           color=color[1])
60     lines!(axT, Dict(vars)[0], Tdu[i, 1:end], linewidth=lw,
61           color=color[1], linestyle=:dash)
62   end
63   display(fig)
64 end

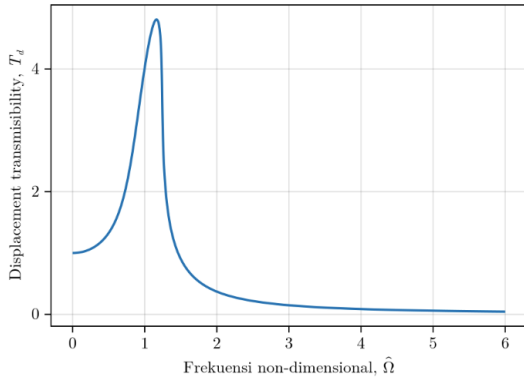
```

**Gambar 3.** Potongan kode penentuan transmisibilitas isolator nonlinier.



**Gambar 4.** Transmisibilitas perpindahan isolator nonlinier untuk  $\zeta_0 = 0.1$ ,  $\chi = 10$ ,  $\kappa = 10.0$ , dan  $\bar{Z}_b = 0.25$ .

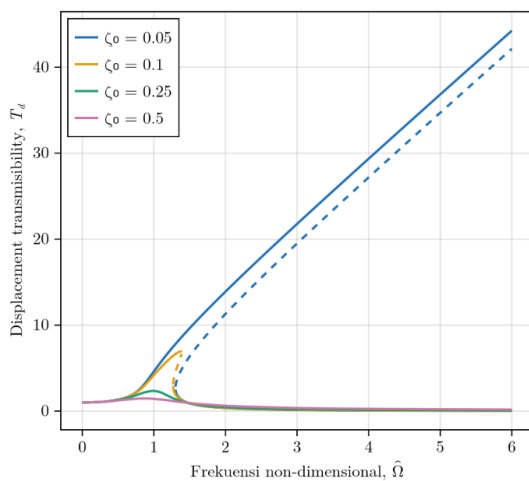
Umumnya, kedua fenomena ini akan menghilang jika amplitudo eksitasi diperkecil. Jika nilai  $\bar{Z}_b$  diset menjadi 0.05, maka transmisibilitas perpindahan seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 5.



Gambar 5. Transmisibilitas perpindahan isolator nonlinier.

3.3. Kondisi tanpa redaman horizontal  $\chi = 0$

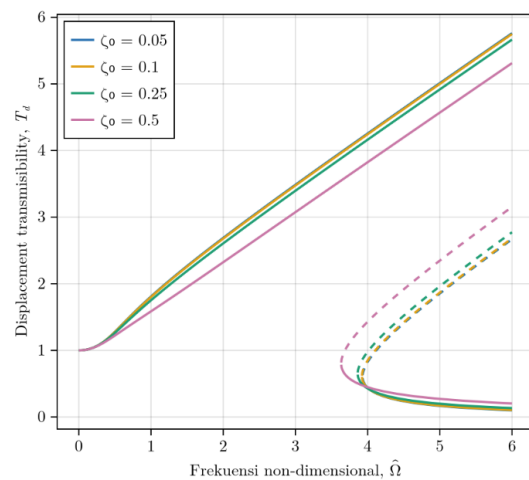
Ketika isolator nonlinier tidak memiliki redaman horizontal menunjukkan bahwa redaman nonlinier tidak diperkerjakan di isolator. Redaman hanya disediakan oleh komponen peredam vertikal. Selanjutnya, komparasi performansi dapat ditunjukkan untuk variasi rasio redaman  $\zeta_0$  seperti yang diberikan dalam Tabel 2 dengan amplitudo eksitasi  $\bar{Z}_b$  konstan. Untuk lebih mudahnya digunakan dua nilai amplitudo eksitasi  $\bar{Z}_b$  berdasarkan Tabel 2 tersebut, yaitu 0.05 dan 0.5. Nilai amplitudo eksitasi  $\bar{Z}_b$  pertama mengindikasikan eksitasi beramplitudo kecil dan nilai kedua menunjukkan eksitasi beramplitudo besar.



Gambar 6. Transmisibilitas isolator nonlinier untuk kondisi tanpa redaman horizontal  $\chi = 0$  dan amplitudo eksitasi kecil,  $\bar{Z}_b = 0.05$ .

Transmisibilitas perpindahan untuk eksitasi dengan amplitudo kecil ditunjukkan pada Gambar 6. Melalui kurva transmisibilitas perpindahan ini diketahui bahwa kenaikan nilai rasio redaman memberikan penurunan puncak resonans isolator. Serta, kenaikan nilai rasio redaman juga akan menghilangkan fenomena lompatan pada kurva transmisibilitas.

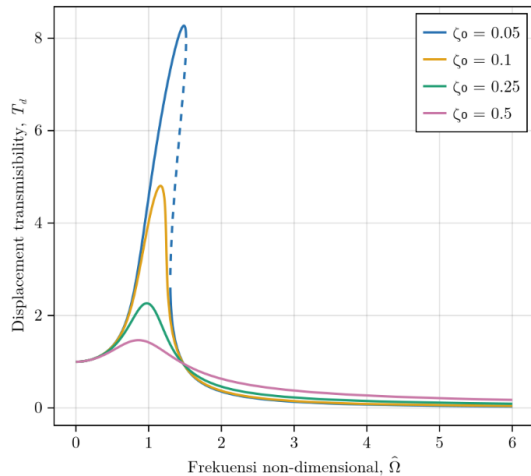
Ketika amplitudo eksitasi besar, ketiadaan redaman nonlinier membuat isolator tidak dapat bekerja dengan baik, seperti ditunjukkan oleh Gambar 7. Hal ini dibuktikan dengan kenaikan rasio redaman tidak dapat menurunkan puncak resonansnya dengan fenomena lompatan masih terjadi.



Gambar 7. Transmisibilitas isolator nonlinier untuk kondisi tanpa redaman horizontal  $\chi = 0$  dan amplitudo eksitasi besar,  $\bar{Z}_b = 0.5$ .

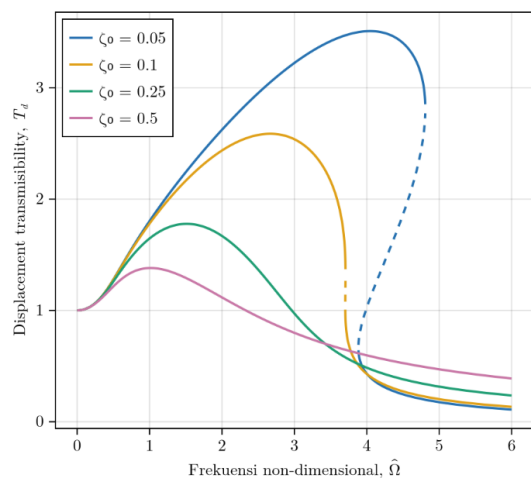
3.4. Kondisi dengan redaman horizontal  $\chi = 10$

Permasalahan yang ditunjukkan oleh kondisi tanpa redaman horizontal ketika amplitudo frekuensi eksitasi besar dapat diatasi dengan menerapkan redaman horizontal. Transmisibilitas perpindahan dapat ditentukan untuk amplitudo eksitasi  $\bar{Z}_b$  kecil, yaitu sebesar 0.05. Transmisibilitasnya ditampilkan pada Gambar 8 yang memperlihatkan penurunan puncak resonans untuk nilai  $\zeta_0$  yang sama dibandingkan untuk kondisi tanpa redaman nonlinier. Dengan keberadaan redaman nonlinier pada isolator dapat mengurangi kemiringan *spine* kurva transmisibilitas perpindahan ke arah posisi vertikal jika dibandingkan dengan kondisi pada Gambar 6.



**Gambar 8.** Transmisibilitas isolator nonlinier untuk kondisi tanpa redaman horizontal  $\chi = 10$  dan amplitudo eksitasi kecil,  $\bar{Z}_b = 0.05$ .

Sementara itu, kondisi amplitudo eksitasi besar  $\bar{Z}_b$  sebesar 0.5 memberikan transmisibilitas seperti yang ditampilkan dalam Gambar 9. Penerapan redaman nonlinier pada isolator akan mereduksi secara signifikan transmisi getaran untuk amplitudo eksitasi yang besar. Tentunya, penggunaan rasio redaman yang besar akan mendukung tujuan ini.



**Gambar 9.** Transmisibilitas isolator nonlinier untuk kondisi tanpa redaman horizontal  $\chi = 0$  dan amplitudo eksitasi besar,  $\bar{Z}_b = 0.5$ .

Melalui simulasi yang telah dilakukan untuk nilai terkecil dan terbesar dari ketiga parameter pada Tabel 1 dapat diketahui beberapa korelasi kondisi fisik dan performansi isolator. Redaman linier (komponen redaman vertikal) hanya berpengaruh untuk menurunkan puncak resonansi kurva transmisibilitas ketika amplitudo eksitasi kecil. Jika amplitudo eksitasi besar, redaman nonlinier akan memberikan dampak yang signifikan untuk menurunkan puncak resonansi.

Di samping itu, baik redaman linier dan nonlinier dapat menurunkan titik awal frekuensi pengisolasian. Titik awal frekuensi pengisolasian ini ditandai sebagai titik potong kurva transmisibilitas dengan garis horizontal ketika transmisibilitas bernilai 1. Kurva transmisibilitas yang berada di bawah nilai 1 merupakan pita frekuensi yang efektif dalam pengisolasian. Persentase penurunan puncak atau frekuensi awal pengisolasian karena pengaruh redaman nonlinier tidak diberikan dalam bahasan ini. Hal ini disebabkan karena untuk sebagian kombinasi variasi memperlihatkan adanya kurva transmisibilitas yang tidak stabil dan sangat miring.

Penggunaan paket program Julia HarmonicBalance.jl menunjukkan keefektifan dalam menghasilkan kurva transmisibilitas untuk hanya beberapa baris kode program. *Bottleneck* pada paket HarmonicBalance.jl terletak pada proses penentuan persamaan harmonik pada persamaan gerak. Hal ini didasari pada paket program ini yang memanfaatkan evaluasi secara simbolik persamaan harmonik tersebut [17].

#### 4. Simpulan

Performansi sebuah isolator getaran nonlinier dengan karakteristik QZS dan redaman nonlinier telah dikaji melalui artikel ini. Untuk kemudahan prosesnya dituliskan kode-kode program dalam bahasa pemrograman Julia melalui penggunaan paket program HarmonicBalance.jl. Kajian yang dibahas adalah variasi rasio redaman vertikal dengan ada/ketiadaan redaman nonlinier untuk variasi amplitudo eksitasi terkecil dan terbesar. Keberadaan redaman nonlinier memberikan pengaruh yang signifikan dalam menurunkan transmisibilitas ketika amplitudo eksitasi besar. Secara umum, penerapan paket Julia HarmonicBalance.jl dapat mengaselasasi lebih cepat proses penentuan transmisibilitas tanpa adanya *overhead* dalam penentuan *harmonic ansatz*-nya. Untuk kedepannya, pengembangan paket Julia untuk metode HB seperti AFT-HB, IHB, atau EIHB dapat dilakukan dengan komparasi hasil dengan paket ini. Tentunya, melalui pengembangan ini tidak diperlukan polinom pendekatan dari suku-suku nonlinier pada persamaan geraknya.

#### Daftar Pustaka

- [1] Liu C, Zhang W, Yu K, Liu T, Zheng Y. Quasi-zero-stiffness vibration isolation: Designs, improvements and applications. *Eng Struct* 2024;301:117282. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117>

- 282.
- [2] Li H, Li Y, Li J. Negative stiffness devices for vibration isolation applications: A review. *Adv Struct Eng* 2020;23:1739–55. <https://doi.org/10.1177/1369433219900311>.
- [3] Ibrahim RA. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *J Sound Vib* 2008;314:371–452. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.014>.
- [4] Ma Z, Zhou R, Yang Q. Recent Advances in Quasi-Zero Stiffness Vibration Isolation Systems: An Overview and Future Possibilities. *Machines* 2022;10. <https://doi.org/10.3390/machines10090813>.
- [5] Balaji PS, Karthik SelvaKumar K. Applications of Nonlinearity in Passive Vibration Control: A Review. vol. 9. Springer Singapore; 2021. <https://doi.org/10.1007/s42417-020-00216-3>.
- [6] Carrella A, Brennan MJ, Waters TP. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *J Sound Vib* 2007;301:678–89. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.10.011>.
- [7] Carrella A, Brennan MJ, Waters TP. Optimization of a quasi-zero-stiffness isolator. *J Mech Sci Technol* 2007;21:946–9. <https://doi.org/10.1007/BF03027074>.
- [8] Carrella A, Brennan MJ, Kovacic I, Waters TP. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness. *J Sound Vib* 2009;322:707–17. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.11.034>.
- [9] Cheng C, Ma R, Hu Y. Beneficial performance of a quasi-zero stiffness vibration isolator with generalized geometric nonlinear damping. *Noise Vib Worldw* 2021;52:59–71. <https://doi.org/10.1177/0957456520972385>.
- [10] Yilmaz C, Kikuchi N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications. *J Sound Vib* 2006;291:1004–28. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.07.019>.
- [11] Yan G, Zou HX, Wang S, Zhao LC, Wu ZY, Zhang WM. Bio-inspired vibration isolation: Methodology and design. *Appl Mech Rev* 2021;73:1–21. <https://doi.org/10.1115/1.4049946>.
- [12] Yan Z, Dai H, Wang Q, Atluri SN. Harmonic Balance Methods: A Review and Recent Developments. *C - Comput Model Eng Sci* 2023;137:1419–59. <https://doi.org/10.32604/cmcs.2023.028198>.
- [13] Wu W, Tang B. The Elliptic Harmonic Balance Method for the Performance Analysis of a Two-Stage Vibration Isolation System with Geometric Nonlinearity. *Shock Vib* 2021:1–13. <https://doi.org/10.1155/2021/6690686>.
- [14] Li YL, Huang JL, Zhu WD. An enhanced incremental harmonic balance method to improve the computational efficiency and convergence for systems with non-polynomial nonlinearities. *Nonlinear Dyn* 2025;113:8265–94. <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10739-z>.
- [15] Li YL, Huang JL, Zhu WD. A generalized incremental harmonic balance method by combining a data-driven framework for initial value selection of strongly nonlinear dynamic systems. *Int J Non Linear Mech* 2025;169:1–22. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104951>.
- [16] Krack M, Gross J. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. Springer Cham; 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.
- [17] Kořata J, del Pino J, Heugel TL, Zilberberg O. HarmonicBalance.jl: A Julia suite for nonlinear dynamics using harmonic balance. *SciPost Phys Codebases* 2022;6:1–28. <https://doi.org/10.21468/scipostphyscodeb.6>.
- [18] Martins TS, Trainotti F, Zwölfer A, Afonso F. A Python Implementation of a Robust Multi-Harmonic Balance With Numerical Continuation and Automatic Differentiation for Structural Dynamics. *J Comput Nonlinear Dyn* 2023;18:1–12. <https://doi.org/10.1115/1.4062424>.
- [19] Bezanson J, Edelman A, Karpinski S, Shah VB. Julia: A fresh approach to numerical computing. *SIAM Rev* 2017;59:65–98. <https://doi.org/10.1137/141000671>.
- [20] Gowda S, Ma Y, Cheli A, Gwóźdz M, Shah VB, Edelman A, et al. High-performance symbolic-numeric via multiple dispatch. *ACM Commun Comput Algebr* 2022;55:92–96. <https://doi.org/10.1145/3511528.3511535>.
- [21] Breiding P, Timme S. HomotopyContinuation.jl: A Package for Homotopy Continuation in Julia. In: Davenport JH, Kauers M, Labahn G, Urban J, editors. *Lect. Notes Comput. Sci. (Conference Int. Congr. Math. Software)*, Cham: Springer International Publishing; 2018, p. 458–65.