ORDE KONVERGENSI VARIAN METODE HANSEN-PATRICK DUA PARAMETER UNTUK MENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINEAR

Lisa Fatmawati, Wartono

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau

Email: [1] lisa_fatmawati15@yahoo.com, [2] wartono@uin-suska.ac.id.

ABSTRACT

Hansen-Patrick's Method is one of iteration method with third order convergence used to solve the nonlinear equation. In here, the author modified Hansen-Patrick's Method by reducing the second derivative using quartic equation to obtain a higher convergence order. Based on the result of the research, a new iteration equation with fourth-order convergence was obtained by involving three functions evaluation and the efficiency index of 1,587401. *Numeric simulation were held on several functions to find out the advantages of new iteration method with Newton's Method, Chebyshev's Method, Halley's Method, and Potra-Ptak's Method. The result Numerical simulation prove that the accuracy of new iterative method is better than the other method.*

Keywords **:** *efficiency index, Hansen-Patrick's Method, nonlinear equations, order of convergence, quartic equation.*

PENDAHULUAN

Persamaan nonlinear adalah persamaan yang memiliki variabel berderajat lebih dari satu atau mengandung nilai fungsi nonlinear, seperti log, sin dan lain sebagainya. Penyelesaian dari persamaan nonlinear adalah menentukan akar suatu persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x)=0 \tag{1}$$

Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode iterasi, metode iterasi digunakan untuk memperoleh hasil yang mendekati nilai sebenarnya.

Salah satu metode iterasi yang biasa digunakan yaitu metode Newton, yang didapatkan dari pemotongan deret Taylor orde satu, dengan bentuk :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

Persamaan (2) memiliki orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi.

Kemudian Hansen dan Patrick memberikan bentuk umum yang disebut dengan Metode Hansen-Patrick, yang diperoleh dari pengembangan metode Newton:

$$x_{n+1}=x_n-\left(\frac{\beta+1}{\beta\pm\sqrt{1-(\beta+1)L_f(x_n)}}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ \beta\neq-1\in\Re \tag{3}$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{4}$$

Pada beberapa metode iterasi yang terdapat turunan kedua $f''(x_n)$ memungkinkan terjadinya permasalahan dibeberapa kasus. Beberapa Peneliti mengembangkan metode iterasi yang bebas turunan kedua dengan tetap mempertahankan jumlah evaluasi fungsi dan memiliki orde minimal tiga untuk mengatasi persoalan tersebut. Oleh karena itu, beberapa Peneliti mengembangkan Metode Hansen-Patrick dengan mengganti turunan kedua $f''(x_n)$. Turunan kedua dapat diganti dengan menggunakan fungsi, seperti yang dilakukan oleh Xiaojian yang mengganti $f''(x_n)$ pada Metode Chebyshev-Halley menggunakan persamaan hiperbola dan Yu dan Xu mengganti $f''(x_n)$ pada Metode Chebyshev-Halley Like menggunakan persamaan parabola.

Berdasarkan uraian di atas Penulis akan mengembangkan Persamaan (3) dengan mengganti turunan kedua menggunakan persamaan kuartik.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penilitian adalah studi literature dengan mengumpulkan data dan informasi terhadap materi-materi yang terkait dalam penelitian dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mendefinisikan kembali Metode Hansen-Patrick pada Persamaan (3).
2. Mengekspansi Metode Hansen-Patrick menggunakan Deret Taylor.
3. Turunan kedua pada Metode Hansen-Parick ditaksir menggunakan persamaan kuartik.
4. Menentukan orde konvergensi dan indeks efisiensi dari metode iterasi yang diperoleh serta menentukan simulasi numerik menggunakan *Maple 13*.

Selanjutnya, sub-bab ini memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan materi untuk uraian pada bagian selanjutnya yang ditulis sebagai berikut ini.

Teorema 1 (Deret Taylor) (Larson dan Edwards, 2010) Misalkan f adalah sebuah fungsi yang turunan ke-$(n+1)$, dalam interval terbuka I yang mengandung c. Maka untuk masing-masing x dalam I, terdapat z diantara x dan c sedemikian sehingga

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x),$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, x < z < c.$$

disebut suku sisa atau kesalahan (error).

Definisi 1 (Orde Hampiran) (Munir, 2013) Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \le M|h^n|$, dengan M adalah konstanta riil dan $M > 0$, maka dikatakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ dan dapat ditulis

$$f(h) = p(h) + O(h^n),$$

dengan $O(h^n)$ merupakan orde galat dari penghampiran suatu fungsi.

Definisi 2 (Orde Konvergensi) (Sharma dkk, 2011) Diberikan $f(x)$ yang merupakan fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan riil untuk $n \geq 0$, yang konvergen ke α. Selanjutnya dikatakan bahwa orde konvergensi dari deret adalah p, jika terdapat sebuah konstanta real $c \neq 0$ dan $p \geq 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c\ .$$

Definisi 3 (COC) (Weerakoon dan Fernando, 2000) Misalkan α adalah akar persamaan dari fungsi $f(x)$ dan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} merupakan tiga iterasi yang hampir mendekati akar α. Kemudian Computational Order of Convergence (COC) dinyatakan dengan ρ dapat diaproksimasi dengan

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}.$$

Definisi 4 (Indeks Efisiensi) (Walter G, 2012) Misalkan q adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $I = p^{\frac{1}{q}}$ dengan p adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

PEMBAHASAN

a. Metode Iterasi yang Dikembangkan

Pada Persamaan (3) memiliki orde konvergensi tiga dan memiliki indeks efisiensi sebesar 1.4422, maka untuk meningkatkan orde konvergensi dan indeks efisiensi akan digunakan persamaan kuartik $y + xy + x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ untuk mentaksir $f''(x_n)$.

Menurut (Kansal dkk, 2015) Metode Hansen-Patrick dapat didefinisikan kembali sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{\beta+1}{\beta + \sqrt{(1-(\beta+1)L_f(x))}} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ . \tag{5}$$

Kemudian $\dfrac{1}{\beta + \sqrt{(1-(\beta+1)L_f(x))}}$ pada Persamaan (5) diekspansi menggunakan deret Taylor disekitar $L_f(x_n)$, selanjutnya ekspansi deret Taylor dipotong hingga orde dua untuk menyelesaikan Persamaan (5), sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \right) + \frac{1}{8}(\beta+3)\left(\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \right)^2 \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{6}$$

Selanjutnya, $f''(x_n)$ akan ditaksir dengan menggunakan persamaan kuartik sebagai berikut:

$$y + xy + x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{7}$$

dengan $a, b,$ dan c adalah konstanta riil.

Salanjutnya, Persamaan (7) memiliki turunan pertama dan turunan kedua sebagai berikut:

$$y(x_n)+xy(x_n)+x^4+x^3+ax^2+bx+c=0\,, \tag{8}$$

$$y'(x_n)+y(x_n)+xy'(x_n)+4x^3+3x^2+2ax+b=0\,, \tag{9}$$

$$y''(x_n)+2y'(x_n)+xy''(x_n)+12x^2+6x+2a=0\,. \tag{10}$$

Dengan mengkondisikan $y(x_n)=f(x_n)$, $y'(x_n)=f'(x_n)$, dan $y''(x_n)=f''(x_n)$ maka Persamaan (10) dapat dibentuk sebagai berikut :

$$f''(x_n)+2f'(x_n)+x_nf''(x_n)+12x_n^2+6x_n+2a=0\,. \tag{11}$$

atau

$$f''(x_n)=\frac{-2(3x_n(1+2x_n)+f'(x_n)+a)}{1+x_n}\,. \tag{12}$$

Oleh karena, Persamaan (12) memuat nilai a ,maka konstanta ditentukan dengan menggunakan Persamaan (8) dan (9) dengan memisalkan $y(w_n)=f(w_n)$ sehingga didapatkan:

$$ax_n^2+bx_n+c=-f(x_n)-x_nf(x_n)-x_n^3-x_n^4\,, \tag{13}$$

$$aw_n^2+bw_n+c=-f(w_n)-w_nf(w_n)-w_n^3-w_n^4\,, \tag{14}$$

$$2ax_n+b=-f'(x_n)-f(x_n)-x_nf'(x_n)-3x_n^2-4x_n^3\,. \tag{15}$$

dengan

$$w_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\;. \tag{16}$$

Selanjutnya, selesaikan Sistem Persamaan (13), (14), dan (15) dengan mengunakan *Softwere Maple 13*, sehingga diperoleh nilai a :

$$a=\frac{1}{x_n(-2w_n+x_n)+w_n^2}\Big(w_n(f(w_n)+w_n^2(w_n+1)-x_n^2(4x_n+3)-f(x_n)-f'(x_n)(1+x_n))$$
$$f(w_n)+x_n^3(2+3x_n)-f(x_n)+f'(x_n)(x_n^2+1)\Big), \tag{17}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (17) ke Persamaan (12), sehingga diperoleh turunan kedua dalam bentuk:

$$f''(x_n)=-\left(\frac{2\big(f(x_n)^3(-f(x_n)+f'(x_n)(4x_n+1))+f(w_n)f'(x_n)^3f(x_n)\big)}{f'(x_n)^2f(x_n)^2(1+x_n)}+\frac{2f'(x_n)^2f(w_n)}{f(x_n)^2}\right). \tag{18}$$

Kemudian tambahkan satu parameter real θ pada Persamaan (18) sehingga:

$$f''(x_n)=-\left(\frac{2\theta\big(f(x_n)^3(-f(x_n)+f'(x_n)(4x_n+1))+f(w_n)f'(x_n)^3f(x_n)\big)}{f'(x_n)^2f(x_n)^2(1+x_n)}+\frac{2f'(x_n)^2f(w_n)}{f(x_n)^2}\right). \tag{19}$$

Substitusikan Persamaan (19) ke Persamaan (6) diperoleh:

$$x_{n+1}=x_n-\left(1+\left(-\frac{A_f\theta}{f'(x_n)^4f(x_n)(1+x_n)}+\frac{f(w_n)}{f(x_n)}\right)+\frac{1}{2}(\beta+3)\left(-\frac{A_f\theta}{f'(x_n)^4f(x_n)(1+x_n)}+\frac{f(w_n)}{f(x_n)}\right)^2\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{20}$$

dengan

$$A_f=f(x_n)^3(-f(x_n)+f'(x_n)(4x_n+1))+f(w_n)f'(x_n)^3f(x_n)\,. \tag{21}$$

Persamaan (20) merupakan modifikasi Metode Hansen-Patrick yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f'(x_n), f(w_n)$ dan $f(x_n)$.

b. Analisis Konvergensi

Berikut ini akan dijelaskan mengenai orde konvergensi dari Persamaan (20), melalui teorema berikut ini.

Teorema 2. Asumsikan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f: I \subset \Re$ yang terdiferensial pada interval terbuka I. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (20) memiliki orde konvergensi empat untuk $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ dengan persamaan galat:

$$e_{n+1} = (5c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{22}$$

Bukti

Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Selanjutnya diekspansi fungsi f disekitar $x_0 = \alpha$ dengan menggunakan Deret Taylor, diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + O(e_n^6)). \tag{23}$$

dan

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + O(e_n^5)). \tag{24}$$

Kemudian Persamaan (23) dan Persamaan (24) dibagi sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + O(e_n^6))}{f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + O(e_n^5))}$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (16c_2 - 36c_2^2c_3 + 9c_3^2 - 5c_5)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{25}$$

Oleh karena

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{26}$$

maka subsitusikan Persamaan (25) ke Persamaan (26), diperoleh

$$f(w_n) = f'(\alpha)(c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (5c_2^2 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)). \tag{27}$$

Selanjutnya A_f pada Persamaan (21) ditentukan dengan menggunakan Persamaan (24) dan (27), diperoleh

$$A_f = f'(\alpha)^4\Big((1+4\alpha+f(\alpha)c_2)e_n^3 + (3+5c_2+20\alpha c_2 + f(\alpha)5c_2^2 + f(\alpha)2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)\Big). \tag{28}$$

Selanjutnya subsitusikan Persamaan (23), (24), (27), dan (28) ke Persamaan (20), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
x_{n+1} = \alpha &+ \left(\frac{1}{2}c_2^2(1-\beta) + \frac{\theta}{1+\alpha}\left(\frac{1}{f'(\alpha)}(4\alpha+1) + c_2\right)\right)e_n^3 + \\
&\frac{1}{(1+\alpha)^2 f'(\alpha)}\left(\left(\left(\frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{7}{2} + 7\alpha\right)f'(\alpha)\beta + \left(3\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\right)f'(\alpha)\right)c_2^2 + \right. \\
&(f'(\alpha)(1+\alpha)\beta + (-2\alpha-2)f'(\alpha))\theta c_2^2 + (((-2-4\alpha-2\alpha^2)f'(\alpha)\beta + \\
&(1+2\alpha+\alpha^2)f'(\alpha)c_3 + ((4\alpha^2+5\alpha+1)\beta - 2 - 8\alpha^2 - f'(\alpha) - 10\varepsilon)\theta)c_2 \\
&\left. + (4\theta c_3 f'(\alpha) + (2-\alpha)\theta\right)e_n^4 + O(e_n^5)\ ,
\end{aligned} \tag{29}$$

Persamaan (29) memberikan informasi bahwa orde konvergensi (20) meningkat jika diambil $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ sehingga dengan mensubstitusikan kembali θ dan β ke Persamaan (29), maka diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (5c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{30}$$

Oleh karena $x_n = e_n + \alpha$ dan $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ maka Persamaan (30) menjadi

$$e_{n+1} = (5c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5). \tag{31}$$

Persamaan (31) merupakan persamaan galat dari modifikasi Metode Hansen-Patrick menggunakan Persamaan Kuartik (MHP) yang menghasilkan orde konvergensi empat dengan $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi. Berdasarkan orde konvergensi dan jumlah evaluasi fungsi maka nilai indeks efisiensi adalah $4^{\frac{1}{3}} \approx 1,5874$.

c. Simulasi Numerik

Pada sub-bagian ini akan dilakukan penghitungan simulasi numerik untuk membandingkan metode iterasi yang diberikan pada Pesamaan (20) yang disebut varian metode Hansen-Patrick (MVHP) dengan beberapa metode iterasi seperti Metode Newton (MN), Metode Chebyshev (CB), Metode Halley (HL), Metode Potra-Ptak (PP). Kemudian untuk membandingkan hasil simulasi numerik akan digunakan beberapa fungsi nonlinear untuk memperlihatkan bahwa MHP lebih efektif digunakan dibandingkan dengan metode iterasilainnya. Uji simulasi numerik dilakukkan dengan menggunakan *Mapel 13* dengan digit 850 desimal, dengan menentukan nilai awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan. Iterasi akan berhenti ketika $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 10^{-95}$.

Adapun fungsi-fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut :

$f_1(x) = xe^{-x} - 0,1$, α = 0,111832559158962

$f_2(x) = e^x - 4x^2$, α = 4,30658472822069929833,

$f_3(x) = \cos(x) - x$, α = 0,7390851332115160641

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$, α = 2,0000000000000000,

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, α = 1,36523003414096845760,

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, α = -1,0000000000000000,

Tabel 1 menunjukan jumlah iterasi (IT) yang memenuhi rumus berikut :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \tag{32}$$

Hasil perhitungan *COC* dan banyaknya iterasi yang digunakan untuk setiap metode iterasi yang dibandingkan diberikan pada Tabel 1. Nilai-nilai dalam kurung pada Tabel 1 adalah orde konvergensi yang dihitung secara komputasi (COC)

Tabel 1. Jumlah Iterasi dan *COC*

$f(x)$	x_0	MN	CB	HL	PP	MVHP
$f_1(x)$	−0,2	8(2,000000)	6(3,000000)	7(3,000000)	4(3,000000)	3(4.000000)
	0,3	10(2,000000)	8(3,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	4(4,000000)
$f_2(x)$	4,0	8(2,000000)	6(3,000000)	5(3,000000)	6(3,000000)	5(4,000000)
	4,5	7(2,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	4(4,000000)
$f_3(x)$	1,0	7(2,000000)	6(3,000000)	5(3,000000)	6(3,000000)	5(4,000000)

	1,5	7(2,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	5(4,000000)
$f_4(x)$	1,8	8(2,000000)	6(3,000000)	5(3,000000)	6(3,000000)	4(4,000000)
	3,0	9(2,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	4(4,000000)
$f_5(x)$	1,0	8(2,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	4(3,999999)
	2,0	8(2,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	4(3,999999)
$f_6(x)$	−1,5	7(2,000000)	6(3,000000)	5(3,000000)	5(3,000000)	4(4,000000)
	0,0	7(2,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	6(3,000000)	4(4,000000)

Tabel 1 menunjukkan jumlah iterasi dari metode iterasi MVHP lebih sedikit dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Selain itu, berdasarkan Tabel 1, metode iterasi MHP mempunyai orde konvergensi empat.

Selain menggunakan COC sebagai ukuran untuk mengetahui preforma suatu metode iterasi, nilai mutlak $|f(x_n)|$ juga dapat digunakan sebagai ukuran performasi dengan melihat ketelitian yang dihasilkan. Nilai-nilai mutlak dari fungsi untuk total evaluasi fungsi (TNFE) sebanyak 12 diberikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai $|f(x_n)|$ dengan $TNFE = 12$

$f(x)$	x_0	MN	CB	HL	PP	MVHP
$f_1(x)$	−0,2	3,0850(e−36)	1,0650(e−09)	1,0650(e−09)	4,6605 (e−37)	5,4214 (e−104)
	0,3	1,0735(e−42)	2,5868(e−11)	2,5868(e−11)	2,2815 (e−37)	8,1273 (e−94)
$f_2(x)$	4,0	5,0253(e−33)	1,5283(e−07)	1,5283(e−07)	4,2981(e−23)	4,3948(e−54)
	4,5	3,1919(e−52)	2,4263(e−12)	2,4263(e−12)	2,8677(e−56)	9,2032(e−166)
$f_3(x)$	1,0	3,0049(e−83)	1,0695(e−20)	1,0695(e−20)	1,2720(e−94)	1,8440(e−268)
	1,5	3,7607(e−64)	6,3613(e−16)	6,3613(e−16)	6,5333(e−72)	9,0041(e−188)
$f_4(x)$	1,8	2,8660(e−41)	1,6678(e−10)	1,6678(e−10)	3,9463(e−35)	5,4148(e−87)
	3,0	4,6449(e−16)	3,3470(e−04)	3,3470(e−04)	5,8202(e−15)	1,2284(e−39)
$f_5(x)$	1,0	3,9823(e−43)	3,5123(e−10)	3,5123(e−10)	3,0006(e−38)	3,0001(e−98)
	2,0	1,2360(e−37)	8,2905(e−09)	8,2905(e−09)	4,0072(e−39)	2,2108(e−112)
$f_6(x)$	−1,5	5,7389(e−66)	7,1934(e−16)	7,1934(e−16)	1,6494(e−72)	7,8388(e−193)
	0,0	1,9261(e−65)	2,7363(e−16)	9,7363(e−16)	1,7252(e−67)	1,7102(e−156)

Tabel 2 menunjukkan bahwa MVHP mempunyai ketelitian dan akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley dan metode Potra-Ptak.

KESIMPULAN

Pada makalah ini, penulis mengembangkan metode iterasi Hansen-Patrick menggunakan persamaan kuartik. Berdasarkan hasil kajian diperoleh metode varian metode Hansen-Patriks (MVHP) dua parameter dengan orde konvergensi empat untuk $\theta = 0$ dan $\beta = 1$ yang melibatkan 3 evaluasi fungsi. Indeks indeks efisiensi yang dihasilkan dari metode varian Hansen-Patriks sebesar 1,5874.

Selanjutnya, berdasarkan dari Tabel 1 dan 2 pada simulasi numerik juga menujukkan bahwa performa metode iterasi yang meliputi jumlah iterasi, COC, nilai mutlak $f(x_n)$ dari metode MVHP lebih baik dari metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley dan metode Potra-Ptak.

DAFTAR PUSTAKA

Traub, J. F., 1964, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentince-Hall,Inc., New York.

Hansen, E. dan Patrick, M., 1977, A family of Root Finding Methods, *Numer. Math*, 27, 257-269.

Xiaojian, Z., 2008, Modified Chebyshev-Halley Method Free from Second Derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 203, 193-198.

Yu, X., dan Xu, X., 2012, A New Family of Chebyshev-Halley Like Methods Free From Second Derivative, *Fixed Point Theory*, 1, 319-325.

Larson, R., dan Edwas, B., 2010, Calculus Ninth Edition, Cengage Learning, USA, 565.

Munir, R., 2013, *Metode Numerik*, Informatika, Bandung, 31-33.

Sharma, J.R., Guha, R.K., dan Sharma, R., 2011, Some Modificated Newton's Method with Fourth Order Convergence, *Advance in Applied Science Research*, 2, 240-247.

Weerakoon, S., dan Fernando, T. G. I., 2000, A Variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence , *Applied Mathematics Letters*, 13, 87-93.

Gautschi, W., 2012, *Numerical Analysis*, Second Edition, Birkhauser, New York, 261.

Kansal, M., Kanwar, V., dan Bhatia, S., 2015, New Modifications of Hansen-Patrick's Family with Optimal Fourth and Eight Orders of Convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 269, 507-519.

Amat, S., Buquier, S., dan Gutierrez, J. M., 2003, Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157, 197-205.

Amat, S., Busquier. S., Guiterrez, J. M., dan Hernandez, M. A., 2008, On the Global Convergence of Chebyshev's Iterative Method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220, 17-21.

Potra, F. A. dan Ptak, V., 1984, Nondiscrere Introduce and Iterative Processes, Research Notes In Mathematics.